BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v11i31.10997

MÉTODO DE EXAUSTÃO DE ARQUIMEDES VIA GEOGEBRA: UMA ATIVIDADE PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

ARCHIMEDES EXHAUSTION METHOD VIA GEOGEBRA: AN ACTIVITY FOR TEACHING MATHEMATICS

Edinelson Rocha Marques[1], Luis Andrés Castillo[2],
Ivonne C. Sánchez[3] e Daniele Pereira Smith[4]

RESUMO

Neste artigo, apresentam-se os resultados do desenvolvimento de um Trabalho de Conclusão de Curso que busca promover atividades para o ensino de conteúdos matemáticos, mais especificamente na área da geometria euclidiana plana. Essas atividades são apoiadas pelo software GeoGebra e pela História da Matemática, utilizando o método de exaustão de Arquimedes. Para isso, foi necessário contextualizar aspectos históricos sobre o filósofo Arquimedes e seu método, bem como os aspectos tecnológicos do software GeoGebra e dos objetos de aprendizagem desenvolvidos nele. Em seguida, descrevemos a atividade proposta, mediada pelo objeto de aprendizagem no GeoGebra. A utilização do software GeoGebra e da História da Matemática como recursos pedagógicos nesse contexto permite explorar a interconexão entre a teoria matemática e sua aplicação prática ao longo dos séculos. Ao trazer aspectos históricos, como o método de exaustão de Arquimedes, para a sala de aula, os alunos são estimulados a compreender a evolução dos conceitos matemáticos e a importância de seu desenvolvimento ao longo do tempo. Portanto, consideramos que essa atividade possui um potencial significativo para promover a capacidade de visualização de conceitos matemáticos nos alunos, por meio de uma abordagem que utiliza a tecnologia digital como mediadora no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, resgata-se um método histórico na resolução de

[1] Licenciado em Matemática pela Faculdade de Matemática (FAMAT) da Universidade Federal do Pará (UFPA), Cametá, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Padre Antônio Franco-Matinha, Cametá, Pará, Brasil. CEP: 68400-000. E-mail: edinelsonrocha720@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-3579-6658.

[2] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Membro do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM). Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: luiscastleb@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5174-9148.

[3] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Membro do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM). Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2485-1059.

[4] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Cametá, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Padre Antônio Franco-Matinha, Cametá, Pará, Brasil. CEP: 68400-000. E-mail: danieleyz@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6982-8357.

determinados problemas, enriquecendo o aprendizado dos estudantes. Em suma, a integração da História da Matemática, o método de exaustão de Arquimedes e o software GeoGebra apresenta-se como uma abordagem inovadora e eficaz para o ensino de geometria euclidiana plana. Essa metodologia amplia as possibilidades de aprendizado, proporcionando aos alunos uma experiência enriquecedora que vai além do ensino tradicional, incentivando a exploração, a descoberta e o desenvolvimento de habilidades matemáticas e cognitivas fundamentais.
Palavras-chave: Método de Exaustão; GeoGebra; ensino de Matemática.

ABSTRACT

In this article, we present the results of the Final Course Project aimed at promoting activities for teaching mathematical content, specifically in the area of Euclidean plane geometry. These activities are supported by the GeoGebra software and the History of Mathematics, using Archimedes' method of exhaustion. To achieve this, it was necessary to contextualize historical aspects about the philosopher Archimedes and his method, as well as the technological aspects of the GeoGebra software and the learning objects developed within it. Next, we describe the proposed activity, mediated by the learning object in GeoGebra. The use of GeoGebra software and the History of Mathematics as pedagogical resources in this context allows us to explore the interconnection between mathematical theory and its practical application throughout the centuries. By bringing historical aspects, such as Archimedes' method of exhaustion, into the classroom, students are encouraged to understand the evolution of mathematical concepts and the importance of their development over time. Therefore, we consider that this activity has significant potential to promote the visualization of mathematical concepts in students, through an approach that uses digital technology as a mediator in the teaching and learning process. Additionally, a historical method is revived in solving certain problems, enriching students' learning. In summary, the integration of the History of Mathematics, Archimedes' method of exhaustion, and the GeoGebra software presents itself as an innovative and effective approach to teaching Euclidean plane geometry. This methodology expands learning possibilities, providing students with an enriching experience that goes beyond traditional teaching, encouraging exploration, discovery, and the development of fundamental mathematical and cognitive skills.
Keywords: Exhaustion Method; GeoGebra; Mathematics Teaching.

Considerações Iniciais

Segundo Mendes (2022), têm surgido tendências híbridas da pesquisa em história da Matemática, decorrentes de discussões entre pesquisadores nos espaços acadêmicos. Uma dessas tendências trata da aliança entre história e tecnologia no ensino de Matemática, cujo foco são as potencialidades que atividades baseadas em informações da história da Matemática e mediadas pelas tecnologias digitais podem contribuir com as ações docentes na sala de aula (Sousa, 2020; Sousa; Andrade, 2016).

A integração da história da matemática com as tecnologias digitais, especialmente através do uso de softwares de Geometria Dinâmica como o GeoGebra, tem sido um tema relevante nas pesquisas e práticas educacionais em diversos contextos. Essa abordagem permite uma aprendizagem mais contextualizada, problematizadora e interdisciplinar da matemática, conforme destacado por Mendes (2015).

O mapeamento realizado por Sánchez, Castillo e Mendes (2021) oferece uma visão abrangente do uso das tecnologias digitais nas pesquisas de história da matemática voltadas para o ensino. Ao observar que os softwares de Geometria Dinâmica, em particular o GeoGebra, são os mais utilizados desde a década de 1990, e que a maioria dessas pesquisas está inserida na modalidade de pesquisa História para o Ensino da Matemática (HEnM), demonstra-se a relevância dessa abordagem para o campo educacional.

As pesquisas e experiências conduzidas por Sousa (2021) corroboram essa tendência, evidenciando o papel fundamental do GeoGebra na consolidação de propostas de aliança entre a história para o ensino da matemática e as tecnologias digitais. A utilização desse software permite uma abordagem mais dinâmica e visual da matemática, facilitando a compreensão dos conceitos históricos e matemáticos pelos estudantes. Assim, a combinação entre a história da matemática, as tecnologias digitais e o GeoGebra oferecem oportunidades valiosas para enriquecer o ensino e aprendizagem da matemática, promovendo uma maior conexão entre os conteúdos matemáticos e as experiências dos estudantes.

Esse argumento é materializado em propostas de atividades que adotam uma abordagem mais contemporânea, utilizando essas tecnologias para explorar problemas ou demonstrações encontradas em tratados matemáticos (Castillo; Sánchez; 2024; Coêlho *et al*., 2023; Sánchez; Castillo, 2022, 2024; Teixeira *et al*., 2023) ou em movimentos sequenciais históricos, como fazem Sánchez, Mendes e Castillo (2023) quando descrevem atividades históricas com GeoGebra para mobilizar conceitos de geometria 3D referentes ao objeto matemático cone, para contribuir com um novo olhar, por meio da tela do computador, para o ensino de matemática baseado nas informações históricas.

Nesse contexto, surge a seguinte pergunta de pesquisa: como adaptar o método de exaustão de Arquimedes numa atividade no ensino de Matemática com GeoGebra? Para respondermos esse questionamento, temos como objetivo descrever o Método de Exaustão de Arquimedes para o ensino da matemática mediado por um objeto de aprendizagem (OA) realizado com GeoGebra com o potencial de dinamizar o referido método nesse software. Nas seguintes seções, foi abordado quem foi Arquimedes, o referido método da Exaustão desenvolvido por este, bem como a perspectiva teórica abordada identificar e caracterizar o objeto de aprendizagem (OA) para dinamizar este método. Após, apresentamos uma atividade mediada pelo OA e, finalmente, as considerações finais.

Uma breve história sobre Arquimedes

Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) é considerado por muitos um dos maiores físicos, matemáticos e inventores da antiguidade, como afirma Alvarenga (2006, p. 1): "é considerado consensualmente o maior matemático da antiguidade. Superou todos os outros pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações". Ele também é conhecido por ser um dos supremos intelectos da civilização ocidental. De acordo com Sá (2011, p. 17): "suas contribuições para a matemática, de certa maneira, anteciparam em 2000 anos as ideias de cálculo de Newton e Leibniz".

Como explica Sá (2011, p. 17), "Arquimedes foi capaz de aplicar o Método da Exaustão, uma forma primitiva de integração, para obter uma boa gama de resultados, alguns dos quais chegam até os dias de hoje". Além disso, Arquimedes foi o precursor do que hoje chamamos de cálculo infinitesimal. No entanto, ele não considerava que as somas possuíam uma infinidade de termos, porque na época os gregos não tinham noção de número real, então não seria pertinente dizer que o método da exaustão era um processo geométrico de caminho para o limite (Boyer, 1996). Contudo, o trabalho desenvolvido por Arquimedes foi, provavelmente, o mais forte impulso para o desenvolvimento da ideia de limite e de infinito.

Como afirma Alvarenga (2006, p. 2), "De fato, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII, que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal". Apesar de sua fama por suas invenções mecânicas e máquinas de guerra, foi na matemática onde encontrou sua paixão.

O Método da Exaustão de Arquimedes

No que corresponde ao tempo de Tales (624-558 a. C) e Pitágoras (582-497 a. C), os matemáticos se dedicavam a investigações das propriedades de figuras geométricas e de números inteiros positivos, os quais eram usados para calcular razões (proporções) entre as áreas daquelas figuras. Na antiguidade os relatos apresentam apenas grandezas comensuráveis provenientes de relações dos números inteiros. Porém com a descobertas dos números incomensuráveis, uma crise permeou a teoria das proporções pitagóricas.

O conhecimento matemático passou por milênios de lapidações e contradições e uma dessas ideias de conhecimento está atribuída ao "Método da Exaustão" ao qual é utilizado para calcular a área de uma figura com base em sucessivas inscrições de polígonos cada vez com número maior de lados, ou seja, quanto mais lados a figura inscrita tivesse, maior precisão teria a área da figura. Assim, a área do polígono inscrito irá tender para a área da figura desejada.

No período correspondente aos tempos de Tales (624-558 a.C.) e Pitágoras (582-497 a.C.), os matemáticos dedicavam-se a investigações das propriedades de figuras geométricas e de números inteiros positivos, os quais eram utilizados para calcular razões (proporções) entre as áreas dessas figuras. Na antiguidade, os relatos apresentavam apenas grandezas comensuráveis provenientes das relações dos números inteiros. Porém, com a descoberta dos números incomensuráveis, uma crise permeou a teoria das proporções pitagóricas. Essa crise começou a desmoronar com Eudoxo de Cnido (408–355 a.C.).

As teorias apresentadas por ele eram consideradas inteiramente geométricas e aplicáveis a grandezas mensuráveis, bem como a grandezas incomensuráveis. O conhecimento matemático passou por milênios de lapidações e contradições, e uma dessas ideias de conhecimento está atribuída ao "Método da Exaustão", utilizado para calcular a área de uma figura com base em sucessivas inscrições de polígonos, cada vez com um número maior de lados. Ou seja, quanto mais lados a figura inscrita tivesse, maior precisão teria a área da figura. Assim, a área do polígono inscrito tenderia para a área da figura desejada.

Segundo Boyer (1996), Arquimedes utilizou seu próprio método primitivo de cálculo integral para encontrar áreas e volumes, o que se assemelha de certa forma ao cálculo atual em essência. Em uma carta a Eratóstenes, Arquimedes explicou seu "método da alavanca" para determinar fórmulas de áreas e volumes. No entanto, ao apresentar provas para essas fórmulas, ele recorreu ao método da exaustão para atender aos critérios de rigor da época.

Esse método específico de exaustão foi criado por Eudoxo, por volta do século V a.C., no entanto, mais tarde, Arquimedes propôs uma melhoria nesse método. Segundo Boyer (1996), foi Eudoxo quem estabeleceu o lema que hoje leva o nome de Arquimedes, às vezes chamado de axioma de Arquimedes, e que serviu como base para o método de exaustão. Boyer (1996) também afirma que o axioma afirma que: dado duas grandezas com uma relação entre elas (ou seja, nenhuma delas sendo zero), é possível encontrar um múltiplo de uma delas que seja maior que a outra.

A principal diferença em relação ao método de Eudoxo é que Arquimedes utilizou dois polígonos: um inscrito e outro circunscrito à circunferência. Conforme menciona Sá (2011):

> [...] Arquimedes usava um método em que inscrevia e circunscrevia polígonos regulares em uma mesma circunferência. [...] com essa comparação, Arquimedes, aumentando exaustivamente o número de lados desses polígonos – como se já estivesse trabalhando com limites! –, conseguiu uma boa aproximação para π (p. 18).

Arquimedes empregou este método para estimar o valor de π, preenchendo o círculo com polígonos de cada vez mais lados. À medida que o número de lados aumentava, o quociente entre a área do polígono e o quadrado do raio do círculo se aproximava do valor real de π. Esta relação é derivada da proporção entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro. Arquimedes repetiu este processo várias vezes, inscrevendo e circunscrevendo polígonos, originando o nome "Método da Exaustão". Ele chegou a utilizar polígonos com até 96 lados, obtendo uma aproximação de duas casas decimais para π, que na época foi calculado como 3,142, valor próximo ao que utilizamos hoje, 3,14159265359.

Este método era empregado na antiguidade por matemáticos para calcular áreas de figuras como elipses, parábolas e hipérboles. A prova do Método da Exaustão frequentemente utilizava o método da contradição, onde partia-se da suposição de que a área real de uma figura era a maior área obtida pela exaustão de polígonos. Então, tentava-se demonstrar que outras áreas obtidas por exaustão eram menores do que a área real. Esse conceito baseava-se na duplicação progressiva do número de lados de um polígono regular inscrito e circunscrito em um círculo, até que a área se exaurisse, permitindo a construção de um quadrado com área igual à do círculo.

Objetos de Aprendizagem

Os Objetos de Aprendizagem (OA) são recursos virtuais destinados a auxiliar os professores no processo de ensino, visando contribuir para a aprendizagem dos alunos. Segundo Koper (2003), esses recursos podem ser definidos como materiais digitais que fornecem informações para a construção do conhecimento, apresentados em formas como imagens, páginas HTML, animações ou simulações, como descrito por Santos (2007). Neste estudo, adotamos o conceito de OA como recursos virtuais passíveis de serem utilizados e reaproveitados para apoiar a aprendizagem, por meio de atividades interativas na forma de simulações ou animações (Kalinke *et al*., 2015).

A simulação envolve o uso de um simulador, ou seja, um modelo computacional de uma situação real ou hipotética, que permite ao usuário explorar as implicações da manipulação dos parâmetros dentro dele (Clark et al., 2009). Por outro lado, a animação é uma forma de visualização dinâmica que se desenvolve em uma velocidade constante e não permite ao usuário interação em termos de manipulação ou modificação de parâmetros (Plass; Homer; Hayward, 2009).

Os OA apresentam uma série de características distintivas. Sabbatini (2012) destaca a reutilização, portabilidade, modularidade e autossuficiência como características principais. Kalinke *et al*. (2015) enfatizam que os OA são pequenos, fáceis de usar e apresentam expectativas de aprendizagem.

Além das características mencionadas, os OA proporcionam várias vantagens para os alunos, como a possibilidade de criar e testar hipóteses, relacionar conceitos, resolver problemas e fazer descobertas de maneira atrativa e divertida (Gallo; Pinto, 2010). Eles também permitem aos alunos explorarem dinamicamente os conteúdos e estabelecerem conexões entre diferentes formas de representação de um mesmo conceito e entre conceitos matemáticos e situações cotidianas (Kalinke *et al*., 2015).

Os objetos de aprendizagem criados com o GeoGebra oferecem vantagens e características distintas, permitindo aos alunos formularem conjecturas e validá-las por meio da exploração e manipulação dinâmica do recurso. Isso torna o aprendizado mais interativo e dinâmico, estabelecendo conexões entre diversas formas de representação dos conceitos matemáticos (Castillo; Gutiérrez; Sánchez, 2020).

Procedimentos Metodológicos

Inicialmente, conforme Gil (2010), foi realizada uma pesquisa bibliográfica abrangente, buscando material já elaborado que contemplasse o tema do Método da Exaustão de Arquimedes. Foram consultados diversos livros e artigos científicos sobre a história da matemática, com o objetivo de compreender os fundamentos e aplicações desse método.

Após a coleta e análise inicial do material bibliográfico, concentramo-nos em investigar as representações visuais e simbólicas do Método da Exaustão de Arquimedes. Isso envolveu uma revisão detalhada de gráficos, ilustrações e descrições matemáticas presentes nas fontes consultadas. A intenção era não apenas entender os conceitos teóricos por trás do método, mas também visualizar como esses conceitos eram representados historicamente.

Com base nessa análise, passamos para a etapa de concepção da atividade de ensino. Aqui, buscamos desenvolver uma abordagem que pudesse abordar de forma clara e interativa os princípios do Método da Exaustão de Arquimedes aos estudantes. Isso incluiu a definição de objetivos de aprendizagem, como compreender a relação entre polígonos inscritos e circunscritos a um círculo e sua contribuição para o cálculo de π.

A próxima fase do estudo foi a adaptação do Método da Exaustão de Arquimedes utilizando o software GeoGebra. Essa decisão foi motivada pelo potencial do GeoGebra em fornece uma plataforma dinâmica e interativa para a exploração matemática. Reinterpretamos as construções geométricas originais de Arquimedes e desenvolvemos uma demonstração dinâmica que permitisse aos alunos manipularem parâmetros e observar as relações matemáticas em tempo real.

Durante todo o processo, foi fundamental garantir a fidelidade ao método original de Arquimedes, ao mesmo tempo em que adaptávamos as técnicas para um ambiente de ensino contemporâneo. Isso exigiu um equilíbrio delicado entre respeitar a precisão histórica e tornar o conteúdo acessível e envolvente para os alunos do século XXI.

Em resumo, o processo metodológico adotado neste estudo envolveu uma pesquisa bibliográfica abrangente, análise detalhada das representações do Método da Exaustão de Arquimedes, desenvolvimento de uma atividade de ensino, adaptação para o ambiente digital usando o GeoGebra.

O Método da Exaustão de Arquimedes no GeoGebra

O GeoGebra é um software gratuito de Matemática Dinâmica, pois combina ambientes de geometria dinâmica com CAS e funções de planilha, tudo em um único aplicativo. Atualmente, é utilizado por uma comunidade importante de professores e pesquisadores em todo o mundo (Diković, 2009; Hohenwarter, 2006). Em seus primórdios, o GeoGebra foi criado como um ambiente de multi-representação e estabelecimento de relações entre a Geometria 2D (Geometria) e a Álgebra (Gráfico; esta interface contém a janela de visualização e a janela algébrica). Ao longo do tempo, foram integradas ferramentas ao GeoGebra que possibilitam explorar conteúdos de Geometria

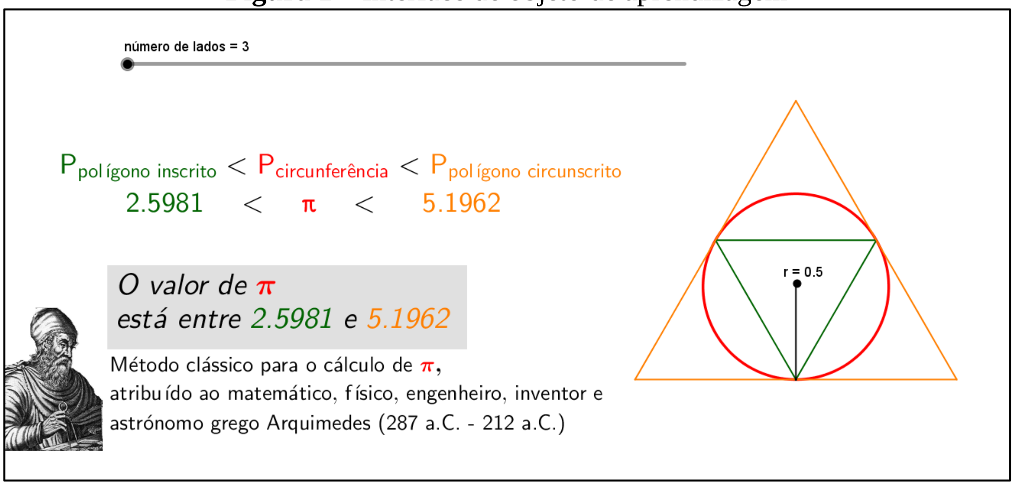
3D (esta interface contém a janela algébrica e a janela de visualização 3D), Estatística (Planilha de Cálculos) e Probabilidades.

Do ponto de vista da aprendizagem, Essa integração de diversas funcionalidades na estrutura e interface do GeoGebra permite destacar alguns usos específicos para este software, sendo o primeiro deles, como ferramenta de visualização (Castillo; Gutiérrez; Prieto, 2013; León *et al.*, 2021) como ferramenta de construção (Castillo; Gutiérrez; Sánchez, 2020; Castillo; Prieto, 2018); como ferramenta de descoberta(Castillo *et al.*, 2019; Gutiérrez; Castillo, 2020; Sánchez; Castillo; Luque, 2021; Sánchez; Sánchez-N, 2020); como ferramenta para a representação e comunicação do conhecimento matemático (Sánchez; Brandemberg, 2019; Sánchez; Brandemberg; Castillo, 2020; Sánchez; Prieto, 2019)

No que diz respeito ao ensino de Matemática, há um interesse crescente de professores e pesquisadores em criar materiais com GeoGebra para serem aplicados com seus alunos e, posteriormente, compartilhados com outros colegas por meio de um repositório disponibilizado pelo Instituto Internacional do GeoGebra. Até agora, há muitos recursos gratuitos e interativos que professores de todo o mundo compartilharam por meio deste repositório, encontrado no site oficial do GeoGebra[5].

Neste sentido, buscamos um objeto de aprendizagem intitulado "Arquimedes e Pi" no repositório de materiais do GeoGebra, a fim de mediar uma atividade para abordar o método da exaustão para encontrar o valor de π a partir dos perímetros de polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência (Figura 1).

Figura 1 – Interface de objeto de aprendizagem

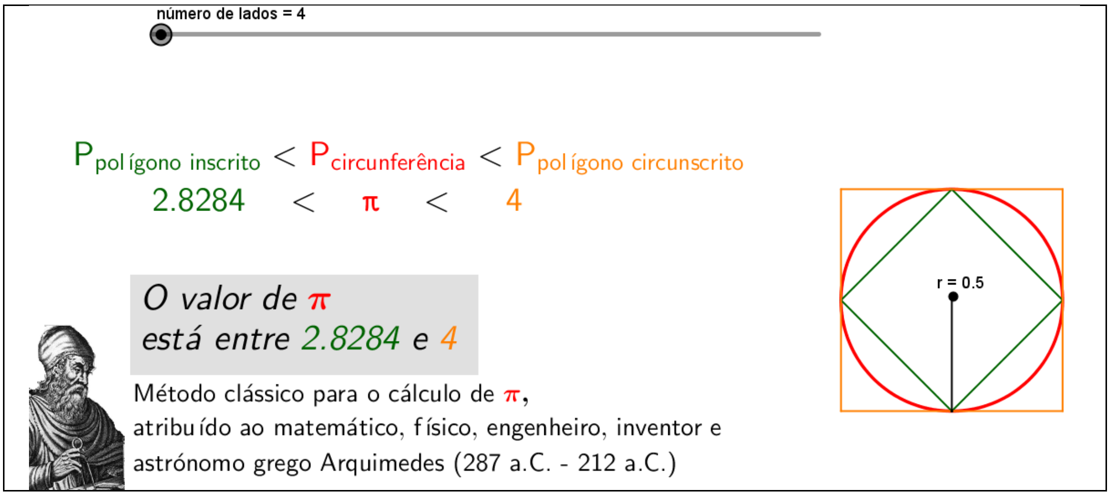


Fonte: Elaboração própria dos autores

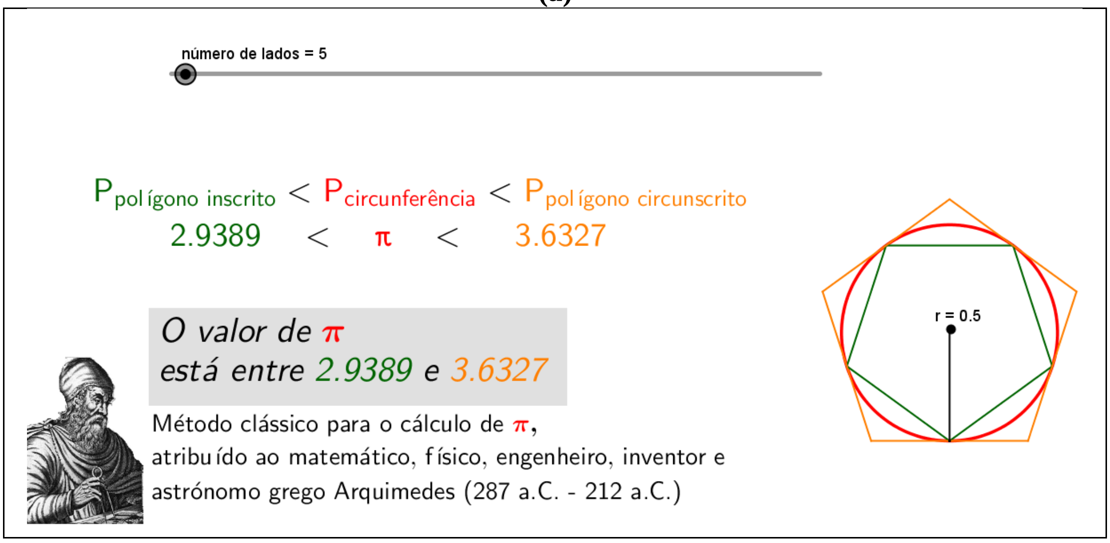
[5] https://www.geogebra.org/?lang=pt

Neste Objeto de Aprendizagem (OA), podemos explorar o método da exaustão para encontrar o valor de π, o qual está entre os valores dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio fixo, neste caso, 0.5 unidades. Neste recurso, o perímetro do polígono inscrito é representado em verde, enquanto o do polígono circunscrito é representado em amarelo. Nesta atividade apoiada pelo recurso, procedemos aumentando o número de lados do polígono via controle deslizante. Começando com o triângulo, observamos que os perímetros dos polígonos ainda estão longe de se aproximarem do valor atual de π. Prosseguimos com o Quadrado (Figura 2a), Pentágono (Figura 2b) e Hexágono (Figura 2c).

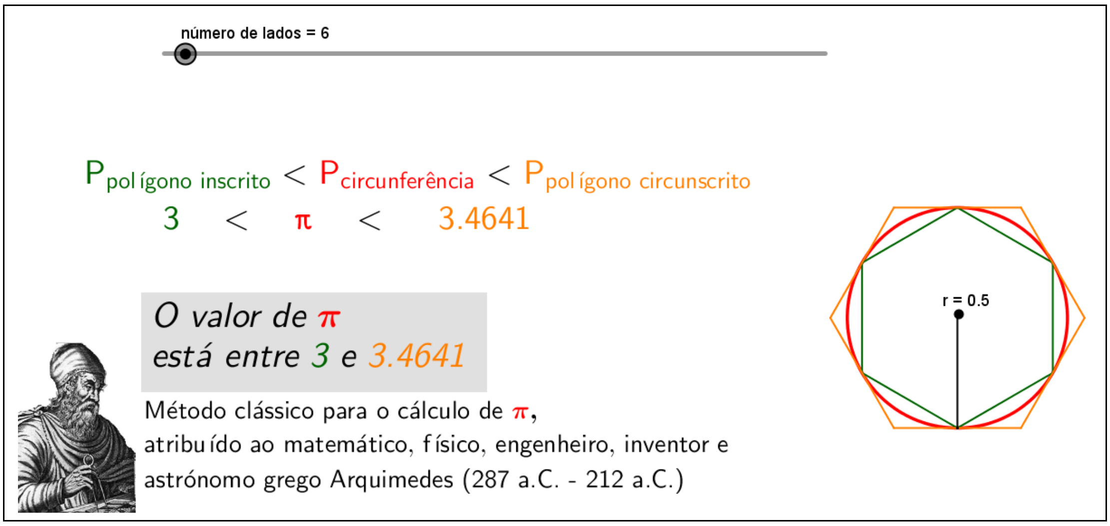
Figura 2 – Interface de objeto de aprendizagem



(a)



(b)

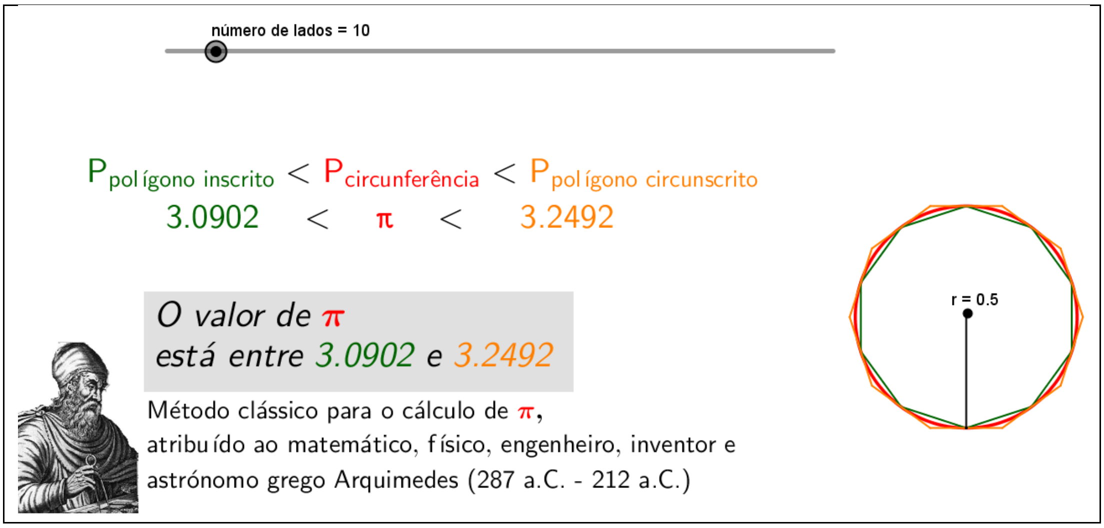


(c)

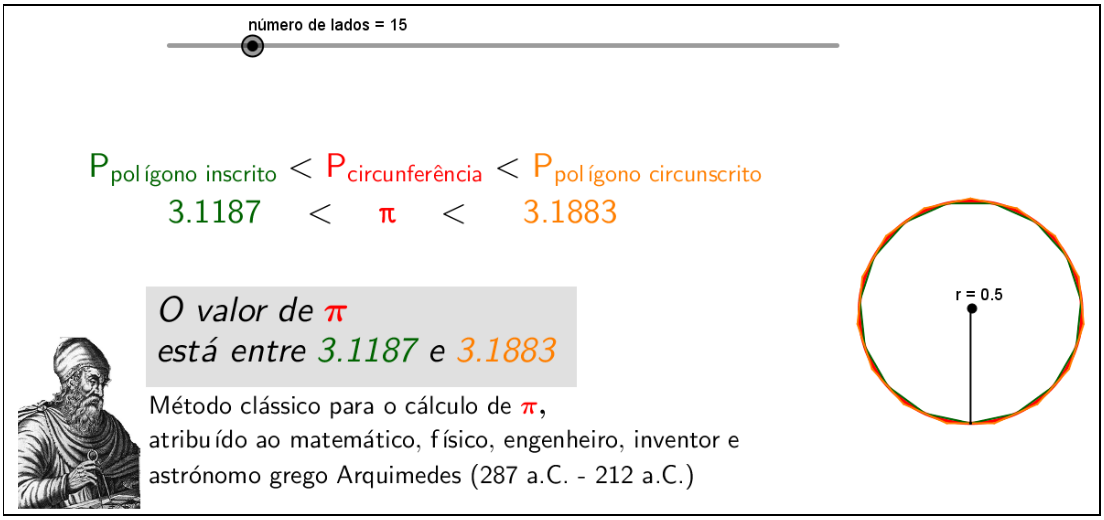
Fonte: Elaboração própria dos autores

Como podemos observar, à medida que aumentamos o número de lados dos polígonos, por um lado, o valor de π vai sendo cada vez mais cercado pelos valores dos perímetros dos polígonos, e, por outro lado, a tendência é que a forma desses polígonos se aproxime de uma circunferência. Verificamos isso nas figuras 4, onde são apresentados polígonos de 10, 15 e 20 lados.

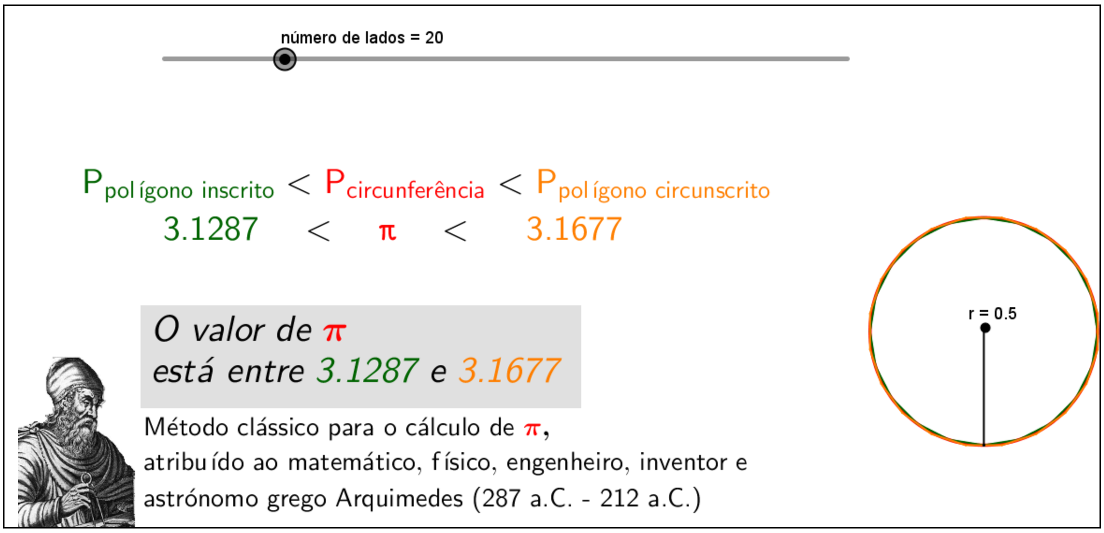
Figura 3 – Interface de objeto de aprendizagem



(a)



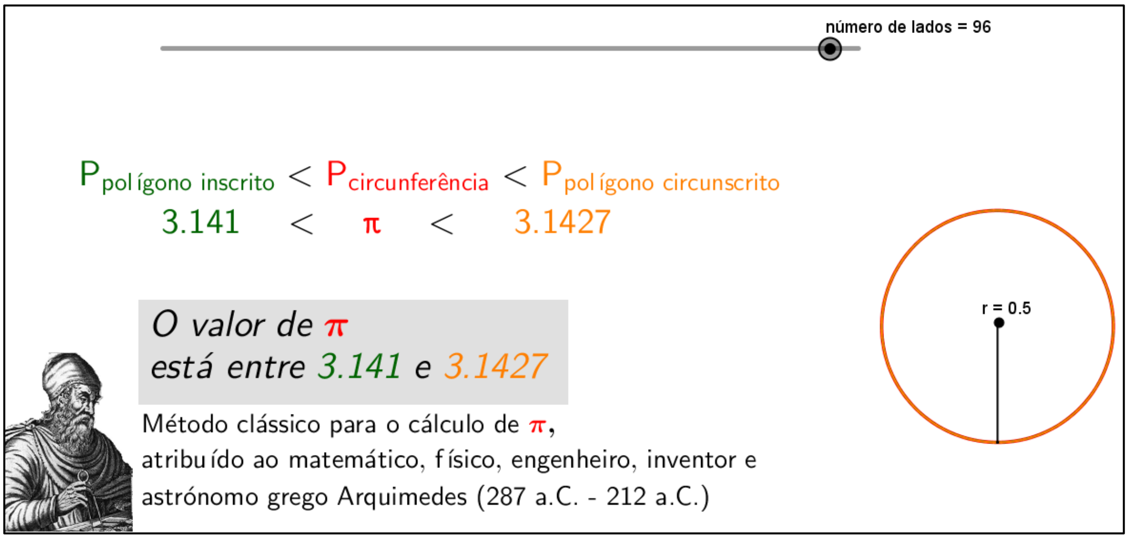
(b)



©
Fonte: Elaboração própria dos autores

Note que o formato dos polígonos se aproxima muito do formato da circunferência, o que significa que, ao destacar a mesma desigualdade mostrada anteriormente para os perímetros dessas figuras, encontraremos uma aproximação muito próxima para o valor de π. Na história da Matemática, relata-se que Arquimedes utilizou polígonos regulares com 96 lados para realizar esses cálculos. Portanto, na figura 4, observa-se o quão precisa é essa aproximação, com um polígono de 96 lados.

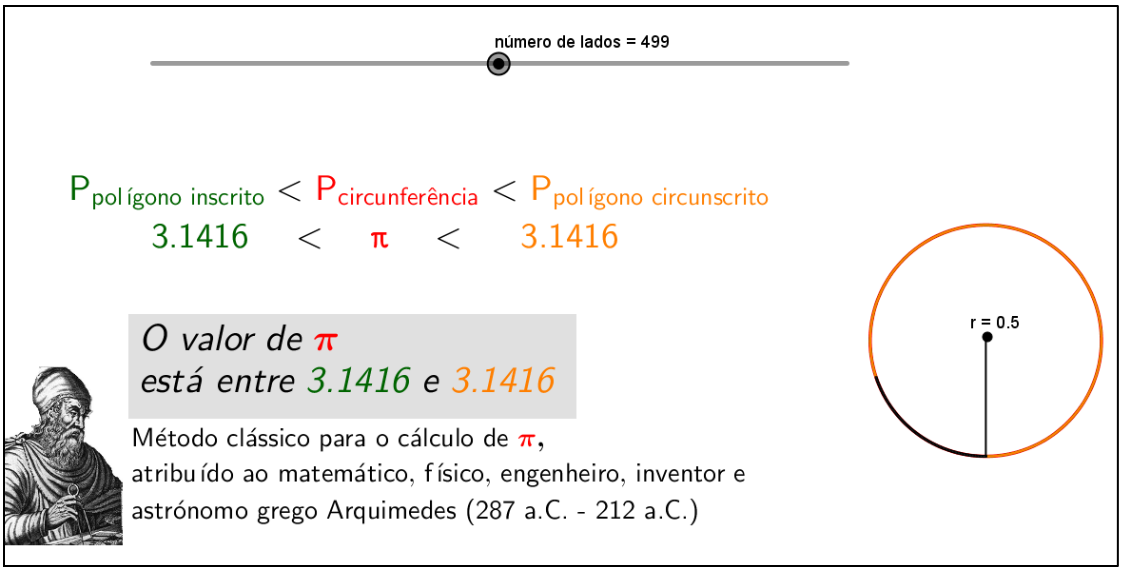
Figura 4 – Método de exaustão com polígono de 96 lados



Fonte: Elaboração própria dos autores

Considerando um polígono de 96 lados como referência, percebemos que na figura já não é possível visualmente distinguir o que está inscrito e o que está circunscrito. Esta prática do método de exaustão de Arquimedes em meios físicos requer muito tempo, instrumentos e habilidades na construção com régua e compasso. No entanto, com a ajuda das tecnologias digitais, podemos testar um número maior de lados de polígonos do que o próprio Arquimedes. Por exemplo, na figura 5, temos polígonos de 499 lados.

Figura 5 – Método de exaustão com polígono de 499 lados



Fonte: Elaboração própria dos autores

Com isso, podemos nos aproximar cada vez mais do valor atual de π. É importante ressaltar que é recomendado que, antes de fazer uso do recurso, o professor apresente aos alunos um breve panorama histórico sobre o filósofo e seu método. Em seguida, por meio do controle deslizante, o professor junto aos alunos pode manipular os lados dos polígonos regulares, experimentar e visualizar como essa variação pode se aproximar ou se afastar do valor atualmente aceito de π.

Considerações Finais

Neste trabalho, descrevemos como adaptar o Método de Exaustão de Arquimedes numa atividade para o ensino da matemática mediado por um objeto de aprendizagem (OA) realizado com GeoGebra com o potencial de dinamizar o referido método nesse software.

Nessa atividade, são abordados conceitos matemáticos fundamentais, como medida do perímetro, polígonos, polígonos regulares, inscrição e circunscrição de um polígono regular, circunferência, raio da circunferência e o comprimento de π. Esses conceitos são explorados por meio do Método de Exaustão de Arquimedes no GeoGebra. Durante o desenvolvimento deste trabalho, refletimos sobre a eficácia do software no aprofundamento do pensamento matemático, buscando não apenas vê-lo como uma ferramenta para resolver problemas, mas sim como uma ferramenta para explorar conceitos matemáticos, construir hipóteses e manipular o objeto de estudo.

Sugerimos, portanto, o uso do OA e dessa atividade, pois acreditamos, com base nos estudos realizados para este trabalho, que existe um grande potencial em relação à visualização e manipulação de figuras planas. O pensamento geométrico no plano é essencial para a compreensão do mundo ao nosso redor, e atividades como essa permitem o desenvolvimento dessa percepção espacial. Além disso, para uma integração plena do GeoGebra na prática de ensino desse conteúdo (e de outros), consideramos importante o papel do professor, que é responsável por planejar, apresentar e orientar as atividades em sala de aula, criando um ambiente propício ao ensino e à aprendizagem da matemática.

Um destaque dessa atividade, com o uso integrado de softwares educacionais no sistema de ensino, é que ela possibilita que a relação entre professor e aluno seja um ponto crucial para estabelecer novos fundamentos e experiências que transformam práticas e metodologias. Portanto, torna-se valioso quando compreendemos que existe um mundo além da escola e que cada indivíduo possui algum conhecimento. Ao incorporarmos matemática, história e tecnologia ao processo de ensino-aprendizagem, a educação tende a se fortalecer.

Consideramos que este trabalho é apenas o início de uma pesquisa, e em futuros estudos, como uma especialização, poderemos executá-lo em sala de aula, a fim de obter resultados sobre o potencial dessas atividades e promover mais discussões sobre o uso do GeoGebra no ensino da matemática. Além disso, esse recurso contribui para o campo emergente da História para o Ensino da Matemática com Tecnologias digitais, no qual este trabalho se soma a outras contribuições pedagógicas, didáticas e conceituais dos estudos e pesquisas entre a História da Matemática e as Tecnologias digitais.

Referências

ALVARENGA, Mauro Lopes. **O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático**. 2006. 14f. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2006.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. (2024). A Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos de Oliver Byrne no GeoGebra. **Paradigma**, v. 45, n. 1, e2024016. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024016.id1529

CASTILLO, Luis Andrés; GUTIÉRREZ, Rafael Enrique; SÁNCHEZ, Ivonne C. O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 106–119, 2020. https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119

CASTILLO, Luis Andrés; PRIETO, Juan Luis. El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **UNION**, n. 52, p. 250–262, 2018.

CASTILLO, Luis Andrés; PRIETO, Juan Luis; SÁNCHEZ, Ivonne C.; GUTIÉRREZ, Rafael Enrique. Uma experiência de elaboração de um simulador com GeoGebra para o ensino do movimento parabólico. **Paradigma**, v. 40, n. 2, p. 196–217, 2019. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p196-217.id764

CLARK, D. B. *et al*. **Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence**. In: The National Research Council Workshop on Gaming and Simulations, 2009, Washington, DC. Disponível em: https://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/dbasse_080068.pdf.

COÊLHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. História da matemática e geometria dinâmica: um novo olhar ao teorema de Viviani para o ensino médio. **Journal of Education Science and Health**, Teresina, v. 3, n. 1, 2023. https://doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178

DIKOVIĆ, L. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. **Computer Science and Information Systems**, v. 6, n. 2, p. 191-203. 2009

GALLO, P.; PINTO, M. G. Professor, esse é o objeto virtual de aprendizagem. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 2, n. 1, p. 1-12, 2010. Disponível em: http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2015/07/Art2-vol2-julho2010.pdf.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GUTIÉRREZ, Rafael Enrique; CASTILLO, Luis Andrés. Simuladores com o software GeoGebra como objetos de aprendizagem para o ensino da física. **Tecné Episteme y Didaxis: TED**, n. 47, p. 201–216, 2020. https://doi.org/10.17227/ted.num47-11336

HOHENWARTER, M. Dynamic investigation of functions using GeoGebra. In: **Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education**. p. 1-5. 2006.

KALINKE, Marco Aurélio; DEROSSI, Bruna; JANEGITZ, Laíza Erler; RIBEIRO, Marina Silva Nogueira. Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. In: KALINKE, Marco Aurélio; MOCROSKY, Luciane Ferreira (org.). **Educação matemática: pesquisas e possibilidades**. Curitiba: Ed. UTFPR, 2015. p.159-186.

KOPER, Rob. Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. In: Littlejohn, A. (Org.) **Reusing online resources: a sustainable approach to eLearning**. London: Kogan Page, 2003. p. 1-8.

LEÓN, M. J.; GUZMÁN, M.; SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Ensino de transformações de funções com GeoGebra: O caso de paraboloides definidos por g(x,y)=a(x-h)^2+b(y-k)^2+c. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 7, n. 1, e2001, 2021. https://doi.org/10.35819/remat2021v7i1id4075

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas. 1. ed. São Paulo: Livraria da Fisica/SBHMat, 2015.

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **COCAR**, Bélem, v. Edição Esp, n. 14, p. 01–26, 2022.

PLASS, J. L.; HOMER, B. D.; HAYWARD, E. O. Design factors for educationally effective animations and simulations. **Journal of Computing in Higher Education**, v. 21, n. 1, p. 31-61, 2009. https://doi.org/10.1007/s12528-009-9011-x.

SÁ, Ilydio Pereira. Arquimedes de Siracusa e o seu Método da Exaustão: Uma Atividade Didática para o Cálculo de π. **Revista Eletrônica TECCEN**, Vassouras, v. 4, n. 3, p. 15- 24, 2011.

SABBATINI, M. Reflexões críticas sobre o conceito de objeto de aprendizagem aplicado ao ensino de ciências y matemática. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 3, n. 3, p. 1-36, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2189/1760.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Métodos Históricos para determinar a equação da Orthotome à Parábola. **Revista Prática Docente**, v. 9, p. e24011, 2024. https://doi.org/10.23926/RPD.2024.v9.e24011.id893.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; MENDES, Iran Abreu. História da Matemática e Tecnologias digitais: do que tratam três décadas de teses e dissertações? **Paradigma**, v. 42, n. 2, p. 183–205, 2021. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p183-205.id1064

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030

SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. Atividades históricas com GeoGebra para explorar a representação geométrica do cone. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, v. 11, n. 1, e23117, 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; BRANDEMBERG, J. C. Aprendizagem geométrica e semiótica na matematização Com GeoGebra: O caso do virabrequim. **REMATEC**, n. 32, p. 212–230, 2019. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2019.n32.p212-230.id213.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; BRANDEMBERG, J. C.; CASTILLO, Luis Andrés. La objetivación de la noción de sector circular en el trabajo matemático con GeoGebra. **Paradigma**, v. 41, n. Extra 2, p. 448–475, 2020. https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.0.p448-475.id924

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; LUQUE, Rafael. Tecnologías Digitales y la Geometría Escolar: El GeoGebra para la enseñanza del teorema de Pitágoras. **REMATEC**, v. 16, n. 37, p. 160–175, 2021. https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2021.n37.p160-175.id316

SÁNCHEZ, Ivonne C.; PRIETO, Juan Luis. Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **PNA**, v. 14, n. 1, p. 55–83, 2019. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.8657

SÁNCHEZ, Ivonne C.; SÁNCHEZ-N, Irene Victoria. Elaboración de un simulador con GeoGebra para la enseñanza de la física. El caso de la ley de coulomb. **REAMEC -**

Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, v. 8, n. 2, p. 40–56, 2020. https://doi.org/10.26571/reamec.v8i2.9557

SANTOS, Marcio Eugen Klingenschmid Lopes dos. **Objetos e ambientes virtuais de aprendizagem no ensino de matemática**: um estudo de caso para o estágio supervisionado de docência (Dissertação de Mestrado). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2007

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre HM, TDIC e IM: Fundamentos e Aplicações. **REMATEC**, v. 15, p. 117–136, 2020. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p117-136.id239.

SOUSA, Giselle Costa de; ANDRADE, L. V. Uma proposta de uso da história da matemática apoiada pelas TIC e HM para o ensino de função. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 7, p. 41–53, 2016. https://doi.org/10.30938/bocehm.v3i7.64.

SOUSA, Giselle Costa de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. REMATEC, v. 16, n. 37, p. 140–159, 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310

TEIXEIRA, Lucas Santos; COÊLHO, Iara Martins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, v. 9, n. 2, p. e2002, 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467

Recebido em: 08 / 07 / 2023
Aprovado em: 10 / 04 / 2024