



CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DAS CURVAS NO SÉCULO XVII

CONSIDERATIONS ON THE STUDY OF CURVES IN THE XVII CENTURY

Jorge Luiz de Almeida Zeferino Junior¹; Maria José Ferreira da Silva²

RESUMO


Neste estudo discutimos brevemente algumas particularidades do estudo de curvas do século XVII que, possivelmente, conduziram ou influenciaram a elaboração de uma grande área de estudos matemáticos que conhecemos hoje por Geometria Analítica e que posteriormente serviram como base para o desenvolvimento Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton e seus contemporâneos. Nosso interesse por esse estudo floresceu durante uma pesquisa anterior intitulada “Um estudo sobre o Cálculo de Fluxões de Isaac Newton” em que foram apresentados alguns desdobramentos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral entre os séculos XVII e XVIII. Esse estudo nos apresentou alguns questionamentos direcionados ao estudo das curvas do século XVII. Assim, por entender que Isaac Newton e seus pares tiveram como base, para suas investigações matemáticas, alguns dos estudos de René Descartes direcionamos este trabalho para compreender melhor o estudo de curvas. Por isso temos como objetivo apresentar algumas particularidades entre curvas geométricas e curvas mecânicas propostas por Descartes no século XVII em sua obra *A Geometria de 1637* bem como em leituras secundárias que abordam o contexto desse século. Respaldados metodologicamente por Folscheid e Wunenburguer dialogamos com os textos no sentido de evitar anacronismos durante nossa investigação. Como resultado, o estudo das curvas, proposto por Descartes, nos conduziu a compreender que esse estudo não se limitou apenas a um estudo puramente matemático, mas também físico com vistas a compreensão de alguns fenômenos que não poderiam ser observados a olho nu. Desse modo concluímos que a classificação de curvas, deixada por Descartes, além de colaborar para o florescimento da Geometria Analítica também serviu como base para o estudo dos movimentos realizado por Isaac Newton.

Palavras-chave: História da Matemática, Curvas Geométricas, Curvas Mecânicas, Geometria Analítica.

ABSTRACT

In this study we briefly discuss some particularities of the 17th century study of curves that possibly led to or influenced the elaboration of a large area of mathematical studies that we know today as Analytic Geometry and that later served as a basis for the development Differential and

¹ Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Doutorando em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Brasil. Rua Marquês de Paranaguá 111 - Consolação, São Paulo-SP, CEP: 01303-050. E-mail: jorgeluiz.edu@hotmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5018-486X>

² Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, São Paulo, SP, Brasil. Rua Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação, São Paulo, SP, CEP 01303-050. E-mail: zeze@pucsp.br.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1249-8091>



Integral Calculus by Isaac Newton and his contemporaries. Our interest in this study flourished during previous research entitled “A study on Isaac Newton's Calculus of Fluxions” in which some developments related to Differential and Integral Calculus between the 17th and 18th centuries were presented. This study presented us with some questions directed to the study of 17th century curves. Thus, by understanding that Isaac Newton and his peers had as a basis, for their mathematical investigations, some of the studies of René Descartes we direct this work to better understand the study of curves. Therefore we aim to present some particularities between geometric curves and mechanical curves proposed by Descartes in the seventeenth century in his work *The Geometry* of 1637 as well as in secondary readings that address the context of that century. Methodologically supported by Folscheid and Wunenburger, we dialogued with the texts in order to avoid anachronisms during our investigation. As a result, the study of curves, proposed by Descartes, led us to understand that this study was not limited only to a purely mathematical study, but also physical with a view to understanding some phenomena that could not be observed with the naked eye. In this way we conclude that the classification of curves, left by Descartes, in addition to collaborating for the flourishing of Analytical Geometry also served as a basis for the study of movements carried out by Isaac Newton.

Keywords: History of Mathematics, Geometric Curves, Mechanical Curves, Analytic Geometry.

Introdução

Estudiosos da matemática e das ciências em geral sinalizam o século XVII como um período repleto de debates em relação ao conhecimento matemático. Dos vários temas discutidos nesse período o estudo das curvas é um assunto que ainda nos entusiasma, não somente pela admiração pelo assunto, mas pelo cabedal de conhecimentos atrelados a ele que pouco se discute. Aqui, no entanto, discorreremos brevemente a respeito de algumas particularidades em relação ao estudo das curvas no século XVII.

Uma dessas particularidades é que foi por meio do estudo das curvas desse período que a Geometria Analítica começou a ganhar força nos estudos de Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1607-1665) para, posteriormente, ser aprofundado com os estudos de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) no promissor Cálculo Infinitesimal. Vale destacar que ainda hoje o estudo das curvas é fundamental nos cursos superiores, pois além de ser um tema que expressa rigor é um dos assuntos mais importantes que compõem boa parte do planejamento das disciplinas dos cursos de exatas, especialmente, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Nessa disciplina muitas vezes buscamos ensinar conteúdos matemáticos por meio de *software*, livros textos, instrumentos ou jogos para um grupo de estudantes com a finalidade de que eles absorvam determinados conteúdos com maior facilidade. Entretanto, sabemos que nem sempre é possível. Contudo, podemos ainda, por meio da história e/ou da filosofia apresentar algumas considerações que venham a contribuir de alguma maneira para a compreensão de alguns objetos ou então de alguns conceitos



matemáticos para aqueles que realmente o buscam. Ou seja, investigar a gênese de um determinado assunto pode elucidar pontos importantes que venham contribuir com a construção do conhecimento científico.

Em outras palavras discutir algumas particularidades sobre o estudo das curvas, mesmo que por um viés histórico ou filosófico, pode nos ajudar a compreender como parte do conhecimento matemático que temos hoje foi difundido com o passar do tempo. Isso posto, para que possamos discorrer sobre o tema proposto buscamos como recurso metodológico dialogar com as leituras por meio de explicação e comentário de texto conforme as orientações dos filósofos Folscheid e Wunenburger (1997, p. 30) na qual “[...], a explicação de texto busca saber o que um autor verdadeiramente disse numa dada passagem, ao passo que o comentário é uma interrogação armada (de referências, sobretudo) sobre o que ele disse de verdadeiro”. Ou seja, explicar um texto:

[...], consiste, como seu nome indica, em enunciar o que há num texto dado, nem mais nem menos. Explicar é desdobrar, mostrar o que está exposto, pressuposto, implicado, subentendido ou calado por um autor preciso, num lugar bem circunscrito. (FOLSCHEID; WUNENBURGUER, 1997, p. 32).

Portanto, por meio das explicações e comentários podemos emergir do texto partes importantes que nem sempre estão claras devido a uma linguagem típica de uma determinada época. Considerando é claro, que “deve-se tomar o cuidado de não parafrasear o texto, abordá-lo sem expectativas e concepções prévias, evitando, deste modo, anacronismos.” (FOLSCHEID; WUNENBURGUER, 1997, p. 31).

Desse modo, para essa investigação, tanto quanto possível buscamos articular comentários e explicações em torno do tema para mostrar, de maneira sucinta, parte dessas particularidades que compõem o estudo das curvas. Em particular duas classificações de curvas apresentadas por Rene Descartes em sua obra *A Geometria* de 1637.

Nessa obra tal classificação é apresentada como Curvas Geométricas e Curvas Mecânicas. As curvas geométricas e mecânicas propostas por Descartes no século XVII podem ser estudadas por dois pontos de vista, um teórico e outro prático e, nesse sentido, buscamos entender como Descartes classificava tais curvas e em que momento podemos notar a Geometria Analítica florescendo. Isso posto, para esse estudo apresentamos inicialmente um breve panorama do estudo das curvas no século XVII, posteriormente apresentamos as Curvas Geométricas e as Curvas Mecânicas para então discorrer



brevemente sobre partes constituintes da Geometria Analítica e, por fim, nossas conclusões.

Um breve panorama sobre curvas

Amplamente falando, do século XVI para o XVII, os estudos matemáticos, de acordo com Roque (2012), se desenvolveram sob dois pontos de vista. O primeiro é que, além dos problemas do cotidiano, tais como a produção de alimentos e construções, também havia certa preocupação em relação as crescentes disputas de territórios que ocorriam por meio de guerras e invasões. Nesse caso os artesões e engenheiros dessa época buscavam na geometria meios de resolver problemas dinâmicos tais como os relacionados a balística. No segundo ponto de vista, talvez puramente matemático, estudiosos desse período examinavam e traduziam cautelosamente obras antigas em busca de novos conhecimentos matemáticos.³

Embora tenhamos dois pontos de vista distintos um assunto em particular, o estudo das curvas, está presente em ambos. Enquanto, por um lado, tal estudo era importante porque além da própria evolução cultural também permitia criar, manusear e utilizar todo tipo de armamento a seu favor. Do outro, estudiosos buscavam por um certo refinamento matemático bem como compreender alguns fenômenos físicos e cosmológicos tais como o movimento de corpos celestes (DEAR, 2001; EVES, 2004; ROQUE, 2012).

Dentre os estudiosos do século XVI para o XVII que investigavam vários assuntos matemáticos, por meio da geometria (ainda sintética), aritmética e álgebra estão Petrus Ramus (1515-1572), Galileo (1564-1642) e Viète (1540-1603) (ROQUE, 2012; ROSSI, 2001). Entretanto, Garman e Bonnie (2009) afirmam que Fermat e Descartes foram os primeiros a expressar curvas gerais na geometria por meio equações, no entanto, foi Descartes que estabeleceu alguns critérios⁴ para validar a relação entre curvas e equações o que fez florescer parte da Geometria Analítica. Tal feito pode ser entendido como um movimento norteador em direção ao papel que as curvas desempenhariam no estudo de

³ Algumas dessas obras são os Elementos de Euclides escrito em Grego por volta de 300 a.C., *Almagesto* de Ptolomeu que foi traduzido para o latim em 1451 e alguns estudos de Arquimedes de balística.

⁴ Por critérios devemos entender as considerações apresentadas por Descartes para definir curvas mecânicas, curvas geométricas bem como o uso de suas coordenadas (DESCARTES, 2018).



cálculo infinitesimal mesmo quando, ainda inacabado, passou por uma análise mais criteriosa nas mãos de Isaac Newton (EVES, 2004; ROQUE, 2012).

Segundo Roque (2012) o estudo das curvas no século XVII eram classificadas como geométricas ou mecânicas e poderiam ser estudadas em interesses distintos, como teórico ou prático. Nesse sentido, Zeferino Junior (2021, p. 27) ressalta que tais interesses surgiram porque “[...] alguns estudiosos reconheciam sua utilidade para outras esferas do conhecimento tais como a ótica e a astronomia”. Agora, precisamos compreender como tal estudo foi difundido por Descartes tendo em vista que seus estudos foram utilizados por outros estudiosos de seu período, especialmente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz.

Discutiremos, no que segue, essa classificação apresentada por Descartes (2018, p. 382) em *A Geometria*⁵ que entende “por geométrico aquilo que é preciso e exato, e por mecânico aquilo que não o é, [...]”. Embora suas palavras pareçam claras delineamos de maneira sucinta essas duas vertentes por meio de suas particularidades com vistas a melhor entendê-las.

Curvas Geométricas

Para Domski (2003), de acordo com a classificação de Descartes baseada nos antigos geômetras, os problemas planos e sólidos eram resolvidos por meio de alguns critérios pertencentes a classe das curvas geométricas. Segundo Descartes (1637, p. 316, tradução nossa)⁶ mesmo as curvas com certo grau de complexidade não devem ser descartadas “desde que possam ser concebidas como descritas por um movimento contínuo ou por vários movimentos sucessivos, cada movimento completamente determinado por aqueles que precedem”. Em outras palavras, esse critério de descrever uma curva por meio de movimentos contínuos ou sucessivos é uma das particularidades da classe das curvas geométricas.

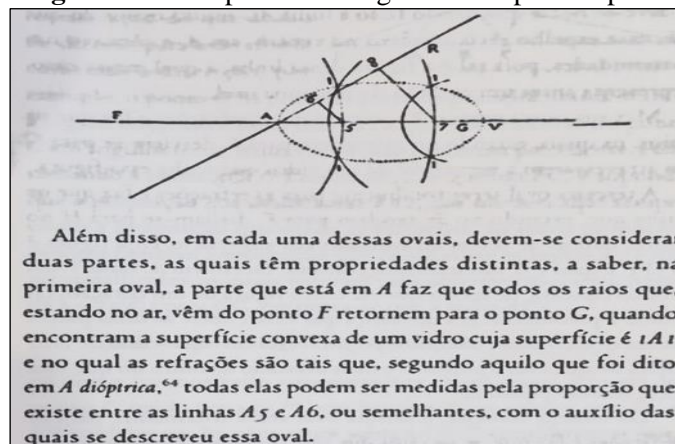
⁵ *A Geometria* é uma obra de René Descartes que aborda a geometria e aritmética do século XVII e seu título original é *La Géométrie-Livrè Premier – 1637*. Hoje essa obra encontra-se organizada em quatro livros (Discurso do Método, A Dióptrica, Os Meteoros e A Geometria) e pode ser encontrada com o título original *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*. Para esse estudo utilizaremos uma tradução feita pelo corpo de pesquisadores da UNESP em 2018 com o título *Discurso do método e Ensaios – 1637*. Em vista disso, a obra será apresentada no texto como (DESCARTES, 2018).

⁶ “dans la mesure où ils peuvent être conçus comme décrits par un mouvement continu ou par plusieurs mouvements successifs, chaque mouvement étant entièrement déterminé par ceux qui le précèdent.” (DESCARTES, 1637, p. 316).

geométricos que para Bos (2001) são considerados por Descartes como puramente geométricos e pertencem ao estudo da óptica geométrica (leis da refração). Segundo Guicciardini (2013), embora Descartes tivesse estabelecido critérios para classificar curvas geométricas em um estudo matemático puro, outros estudiosos, que pertenciam a sua rede de relacionamentos, percebiam sua utilidade em outras circunstâncias, entre eles Huygens (1596-1687) e Beaune (1601-1652). Ou seja, existia uma rede de relação em que os praticantes de matemáticas compartilhavam seus conhecimentos.

Descartes, ao buscar o melhor entendimento possível das curvas geométricas, despertou a confiança de estudiosos que buscavam soluções geométricas para compreender situações reais. Indícios do estudo das curvas geométricas nos problemas de construção de lunetas e lentes ovais aparecem em sua obra (Figura 2).

Figura 2 - Exemplo de curva geométrica para a óptica.



Fonte: Descartes (2018, p. 421).

A construção de determinadas lentes, por meio do estudo de curvas, permitia então investigar fenômenos de refrações e movimentos de corpos celestes. Segundo Descartes (2018, p. 195), “trata-se, então, de determinar a figura que deve ter uma lente para transformar os raios de luz de paralelos em convergentes a um único ponto”. Para Guicciardini (2013, p. 243, tradução nossa)⁸ “aqui está o valor de retomar o caminho que a perícia dos astrônomos procurava para determinar longitude; que o estudo do movimento dos corpos em queda não era somente acadêmico, [...]”. Foi nesse cenário que o estudo das curvas geométricas, tais como as cônicas, passou a ser utilizado para fins

⁸ “Here is the value of returning to the way that the expertise of astronomers was sought for the determination of longitude; that the study of the motion of falling bodies was not only academic, [...]” (GUICCIARDINI, 2013, p. 243).



práticos e as curvas a serem reconhecidas por curvas técnicas. De acordo com Roque (2012, p. 286), tais curvas foram utilizadas com a finalidade de estabelecer a “trajetória de pontos ou curvas ópticas e a tangente que permite determinar a direção de um projétil ou formato de lentes.”

Além disso, o modo de construção dessas curvas, do ponto de vista técnico, segundo Guicciardini (2013, p. 243, tradução nossa)⁹ “[...], era importante para os praticantes de matemática polirem a superfície de uma lente, projetarem o fuso hiperbólico de um relógio e os dentes de uma engrenagem, por exemplo”. Para Rosa (2012) o estudo de curvas para fins práticos, como no caso da construção de lentes, mostrou-se útil para os estudiosos do século XVII, uma vez que sua utilização tornava possível analisar os movimentos dos corpos celestes naquela época.

Um dos estudiosos que se debruçou no estudo de cônicas para fins práticos foi Johannes Kepler (1571-1630) em sua obra *Astronomia Nova* de 1609 que, segundo Dear (2001, p. 76, tradução nossa)¹⁰, “ele [Kepler] havia empreendido originalmente, a pedido de Tycho Brahe, determinar um modelo astronômico satisfatório para o movimento de Marte”. Diante dessas considerações concordamos com Zeferino Junior (2021, p. 28) quando afirma que:

[...], o estudo de curvas não se limitava somente ao estudo geométrico simples, mas também sua aplicação técnica para fabricação de lentes e espelhos que tinham como propósito desvendar as potencialidades no estudo do movimento e óptica, navegação e a compreensão de fenômenos.

Em específico, no caso de Kepler seus estudos deram origem a “uma nova motivação para o estudo das seções cônicas e suas propriedades relacionadas à astronomia e à mecânica em particular.” (KOUDELA, 2005, p. 199, tradução nossa).¹¹ Em outras palavras foi por meio de investigações que envolviam curvas geométricas que estudiosos como Kepler, Roberval (1602-1627) e Newton puderam investigar questões a respeito de movimento, tangente e velocidade. Entretanto, durante as investigações desses estudiosos surgiram problemas que envolviam curvas complexas que não poderiam ser resolvidos por meio das curvas geométricas propostas por Descartes.

⁹ “[...] it was important for mathematical practitioners to polish the surface of a lens, to design the hyperbolic spindle of a watch and the teeth of a gear, for example” (GUICCIARDINI, 2013, p. 243).

¹⁰ “he [Kepler] had originally undertaken at the request of Tycho Brahe (1546-1601) to determine a satisfactory astronomical model for the motion of Mars” (DEAR, 2001, p. 76).

¹¹ “a new motivation for the study of conic sections and their properties related to astronomy and mechanics in particular” (KOUDELA, 2005, p. 199).



Embora Descartes tenha apresentado que as curvas retificáveis pertençam a classificação das curvas geométricas, um ano após a publicação de sua obra *A Geometria* “Descartes se deparou com uma curva mecânica que se verifica ser retificável.” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 242). Dentre esses problemas estavam a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo. Para Carvalho (2004) a quadratriz, conhecida como curvas de Hípias, era utilizada para resolver problemas referentes a quadratura de círculos e a trisseção de um ângulo arbitrário.

Já a espiral, conhecida como espiral de Arquimedes, ou espiral aritmética, segundo D’Acampora (2014, p. 22), foi definida como “o lugar geométrico de um ponto movendo-se a velocidade constante sobre uma reta que gira sobre um ponto de origem fixo a velocidade angular constante”. No que segue discutimos o ponto de vista de Descartes para problemas geométricos que possuem curvas complexas que, por ele, foram classificadas como curvas mecânicas.

Curvas Mecânicas

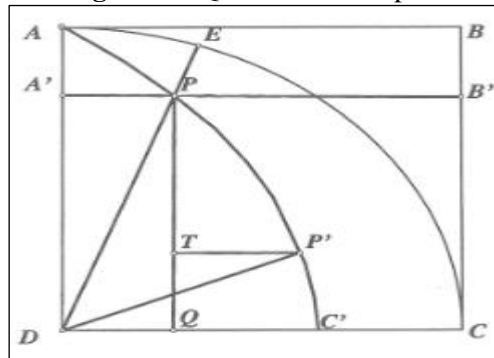
As curvas que Descartes não apresentou em *A Geometria*, nomeadas por ele como curvas mecânicas, eram construídas por movimentos diferentes o que dificultava uma determinação precisa de sua medida. Segundo Merli (2016, p. 120), isso ocorre porque “a construção tanto da espiral quanto da quadratriz envolve dois movimentos distintos, um movimento linear e outro movimento angular”. De acordo com Bos (2000) para Descartes a proporção entre os diferentes movimentos não poderia ser conhecida exatamente. Desse modo, para Descartes (2018, p. 383) “[...] a espiral, a quadratriz e outras linhas semelhantes, que não pertencem verdadeiramente senão às mecânicas e não estão entre aquelas que penso que se devem aqui admitir [...]”

Nesse sentido Smith (1954, p. 43, tradução nossa)¹², observa que “em virtude de poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não tem entre si qualquer relação que possa ser exatamente medida”. Vaz (2010, p. 8) define as curvas mecânicas como aquelas “que não podem ser descritas por uma equação algébrica [...]”. Em outros termos, curvas mecânicas como a quadratriz (Figura 3) e a espiral não poderiam ser medidas precisamente, além disso não poderiam ser expressas por apenas uma única equação algébrica.

¹² “by virtue of the fact that they can be imagined to be described by two movements which have no relationship between them that can be exactly measured” (SMITH, 1954, p. 43).



Figura 3 - Quadratriz de Hípias.



Fonte: Ferreira (2010, p. 206).

Desse modo Descartes (2018, p. 386) justifica que diferente das curvas geométricas em uma curva mecânica:

[...] os pontos encontrados são determinados por alguma medida arbitrária, de natureza mais simples que é exigido pela natureza da curvatura, de modo que eles apenas coincidem com os pontos dessa curva, não sendo, portanto, propriamente pontos seus.

Ou melhor, enquanto os pontos de uma curva geométrica são representados somente pela própria curva, os pontos de uma curva mecânica podem apenas coincidir com a curva. No caso da (Figura 3), se o ponto P é a interseção entre as retas DE e A' B', então, o ponto P descreve a curva denominada de quadratriz. Desse modo, podemos dizer que Descartes buscou estabelecer uma conformidade entre construções geométricas e expressões algébricas de acordo com os movimentos necessários para construir determinadas curvas.

Quanto ao movimento, o ato de construir ou desenhar tais curvas é que definia se uma curva se configurava como geométrica ou mecânica. Disso, observamos que Descartes indicava que curvas mecânicas não apresentavam uma medição precisa por ter movimentos distintos durante sua construção. Segundo Donski (2020, p. 4, tradução nossa):¹³

[...] para Descartes, geometria e mecânica exigem consideração do movimento. Também é claro que, para Descartes, essas disciplinas tomam abordagens essencialmente diferentes para o movimento. Em geometria, uma vez que se

¹³ “[...], for Descartes, geometry and mechanics require consideration of motion. It is also clear that, for Descartes, these disciplines take essentially different approaches to motion. In geometry, since "exactness of reasoning" is sought, the movements of properly geometric construction are movements that meet an entirely rational, even intuitive, standard of clarity and distinction. In mechanics, a very different standard is at play.” (DOMSKI, 2020, p. 4).



busca ‘exatidão do raciocínio’, os movimentos da construção geométrica são movimentos que atendem a um padrão totalmente racional, até mesmo intuitivo, de clareza e distinção. Na mecânica, um padrão bem diferente está em jogo.

De modo geral, podemos então considerar que, para Descartes, a precisão de tais curvas era obtida por meio de sua construção, pois curvas geométricas possuíam movimentos contínuos e, conseqüentemente, curvas mecânicas movimentos descontínuos e, para ele, a continuidade está intimamente relacionada à concepção de racionalidade. Conforme observado por Domski (2020, p. 4, tradução nossa)¹⁴ a:

[...], precisão da construção para produzir representações fiéis de alguma curva especificada é que norteia a prática mecânica, razão pela qual, ao construir curvas, o mecanicista pode usar mais movimentos do que aqueles que estão disponíveis para o geômetra.

Em outras palavras, a precisão durante a construção de uma curva era fundamental para Descartes. Para Roque (2012, p. 318) os cuidados com uma demonstração matemática estão além da incumbência de convencer “deviam sobretudo esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-los. Por isso ele [Descartes] rejeitava a demonstração por absurdo”. Para Merli (2019, p. 8), os movimentos que definiam a precisão de uma curva que Descartes apresenta em seus estudos “não está relacionada à construção ‘física’ das curvas, ou melhor, àquilo que está no papel, mas, sim, à compreensão racional da construção, a exatidão do raciocínio”.

Isso porque, para alguns geômetras do século XVI, uma curva construída por meio de um instrumento mecânico apresentaria alguma imprecisão e, portanto, seria uma curva mecânica. Por outro lado, para Descartes o que definia uma curva como geométrica ou mecânica não era o instrumento utilizado e sim a exatidão de raciocínio pela própria geometria. Essa primeira mudança de pensamento em relação as curvas é um dos elementos que compõem o nascimento da Geometria Analítica:

[...], ao dizer que isso aconteceu em razão da necessidade de servir-se de alguma máquina para descrever essas linhas, seria necessário rejeitar, pela mesma razão, os círculos e as linhas retas, visto que estes não são descritos sobre o papel senão com um compasso e uma régua, os quais também podem ser chamados de máquinas. (DESCARTES, 2018, p. 381).

¹⁴ “[...], precision of construction to produce faithful representations of some specified curve that guides mechanistic practice, which is why, in constructing curves, the mechanist can use more motion than is available to the geometerist.” (DOMSKI, 2020, p. 4).



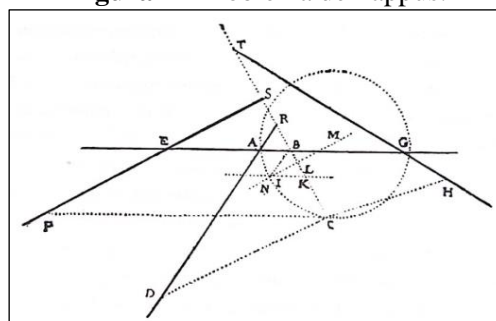
Em outras palavras, para a maioria dos geômetras dos séculos XVI e XVII as curvas eram classificadas como geométricas ou mecânicas conforme o instrumento utilizado. Já para Descartes as curvas são classificadas como geométricas ou mecânicas por meio de um padrão de raciocínio ligados a ideia de movimento e continuidade.

Outro ponto que pertence ao florescimento da Geometria Analítica é o que Descartes considera como comprimento de um seguimento de reta. Segundo Vaz (2005) enquanto outros geômetras consideravam o símbolo a^2 como uma área Descartes o considerava como o comprimento de um determinado seguimento de reta. Com base nessas considerações iniciais Descartes apresentou seu método para resolver grande parte dos problemas de geometria que, segundo Vaz (2005, p. 2) pode ser resumido em três partes:

Nomear: consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema. Equacionar: estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis. Construir: construir as soluções geometricamente, fazendo uso de régua e compasso.

Por esse método Descartes buscou resolver um problema antigo de geometria pura, o problema de *Pappus* para quatro linhas (Figura 4). Após muitas explicações sobre como os antigos resolviam esse problema Descartes (2018, p. 374-375) ressalta “farei o esforço de fornecer aqui a demonstração em poucas palavras, pois já começo a entediarme de tanto escrever”. Em poucas palavras Descartes utilizou seu método que consiste em nomear, equacionar e construir.

Figura 4 - Problema de Pappus.



Fonte: Descartes (2018, p. 399).

Durante o desenvolvimento de seu método é que Descartes apresenta, pela primeira vez, uma breve noção de origem das coordenadas. Segundo Descartes (2018, p. 375-376, **negrito nosso**):



[...], primeiramente, suponho a coisa como já feita e, para desembaraçar-me da confusão de todas essas linhas, considero uma das linhas dadas e uma daquelas que se devem encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais e às quais me esforço para relacionar todas as outras como segue. Que o segmento da linha AB, o qual está entre os pontos A e B, seja designado por x e que BC seja designado por y, e sejam prolongadas todas as demais linhas dadas até interceptarem essas duas, também prolongadas, se houver necessidade e se elas não lhes forem paralelas, como vedes aqui que elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S e T.

Mesmo que o sistema que ele construiu $AB = x$ e $BC = y$ não seja ortogonal e sim oblíquo podemos notar que se seguirmos fielmente suas orientações o ponto A passa a ser a origem do sistema dessas coordenadas. Podemos perceber que Descartes deu passos importantes para o estudo das curvas no século XVI, enquanto florescia o que hoje conhecemos como Geometria Analítica. Concordamos com Vaz (2005, p. 6) quando destaca: “a resolução do problema de Pappus, dada por Descartes, é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Reduzindo o problema a duas retas e, ao graduá-las, constrói-se o sistema de coordenadas, base da Geometria Analítica.”

Vale destacar que embora Descartes tenha apresentado uma nova maneira de classificar as curvas por meio de movimentos foi Newton que se debruçou no estudo dos movimentos que geram uma curva. No caso de Newton, as questões que envolviam determinados movimentos, que poderiam ser contínuos ou não, foram explorados em duas de suas obras que tratam de curvaturas e quadraturas.¹⁵

Roque (2012, p. 268) destaca que o estudo dos movimentos ganha força porque “a busca de tangentes se insere em problemas relacionados ao estudo do movimento e, a partir dos anos 1630, alguns matemáticos do círculo de Mersenne, como Roberval, já determinavam tangentes por meio do movimento dos pontos que geram a curva”. Para Roque (2012) as investigações que envolviam curvas no século XVII representavam uma pequena parcela de estudos em diversas áreas de saberes por estudiosos que pertenciam ou não às academias e que buscavam não só soluções para problemas do cotidiano, mas apresentavam suas ideias em relação a matematização da natureza.

Desse modo podemos dizer que no século XVII as curvas poderiam ser abordadas geometricamente e mecanicamente com suas particularidades de construção bem como

¹⁵ *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*, que foi publicada em 1736 e *De Analysis Per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* de 1711.



de utilização e se destinavam não só ao estudo teórico, mas também a questões de ordens práticas (ZEFERINO JUNIOR, 2021).

Considerações Finais

Por intermédio desse estudo foi possível identificar algumas diferenças entre os dois tipos de curvas, como os critérios para classificá-las como geométricas ou mecânicas, apresentados por Descartes no século XVII, além de que nesse período, estudiosos de diversas áreas do conhecimento se debruçavam para resolver problemas, não só teóricos, mas também aqueles de seu cotidiano. Notamos ainda que por trás das investigações que envolviam esses dois tipos de curvas os estudiosos tinham em comum um considerável interesse pelo estudo do movimento, tendo em vista que este ou a direção de um determinado objeto poderiam ser interpretados geometricamente e representados algebricamente. Entre esses estudiosos estão Newton, Leibniz e Kepler, que buscavam compreender alguns tipos de fenômenos ou movimento de corpos celestes como no caso de Kepler.

Observamos também que cada curva possuía uma particularidade tanto de construção, como de utilização e que o vínculo entre curvas geométricas e sua expressão algébrica, apresentada por Descartes, reflete parcialmente algumas particularidades iniciais de um campo de estudos que conhecemos hoje por Geometria Analítica. Com base na ideia de que as curvas mecânicas resolvem certos tipos problemas que as curvas geométricas não conseguem, podemos entender que seu próximo passo, isto é, a sua Geometria Analítica, corresponde a uma nova maneira de lidar com problemas independentemente de serem geométricos ou mecânicos?

Referências

- BOS, Henk Jan Maarten. *Redefining Exactness: Descartes Geometry*. **Springer Science**, New York. 2001, p. 225-229.
- BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da Matemática**. Editora Edgard Blücher Ltda. Brasil. 2012.
- CARVALHO, João Pitombeira. Os três problemas clássicos da matemática grega. **II BIENAL DA SBM**, p. 1-21, 2004.
- D'ACAMPORA, Raphael. **Solução dos três problemas clássicos da matemática grega por curvas mecânicas**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática



em Rede Nacional PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), 2014.

DEAR, Peter. **Revolutionizing the Sciences: European Knowledge and Its Ambitions, 1500-1700.** 3. ed. [S.l.]: [s.n.], 2001.

DESCARTES, René. **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences -1637.** Biblioteca Central Nacional de Roma. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_LI0lk1_nUNwC/page/n3/mode/2up

DESCARTES, René. **Discurso do Método & Ensaios,** São Paulo - SP, 2018.

DOMSKI, Mary. **Descartes, Mathematics, and the Science of Motion.** Encyclopedia of Modern Philosophy and Science, 2020.

DOMSKI, Mary. **The Constructible and the Intelligible in Newton's Philosophy of Geometry.** Source: Philosophy of Science, Vol. 70, No. 5, 2003.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. Nicomede e os três problemas clássicos gregos. **Revista Brasileira de História da Matemática,** v.10, n.20, p.193-211, 2010.

FOLSCHEID, Dominique.; WUNENBURGER, Jean-Jacques. **Metodologia filosófica.** São Paulo: Martins Fontes, 1997. P. 29-55.

GARMAN, Michael; BONNIE, Jessica. **Curvature of Surfaces in 3-Space.** Mdsoar.org, 2009.

GUICCIARDINI, N. "Mathematics and the New Sciences," In: BUCHWALD, J. Z. & R. Fox (eds.). **The Oxford Handbook of the History of Physics.** Oxford University Press, 2013, p. 241-249.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics.** 3. ed. Columbia: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2009. ISBN 0-321-38700-7.

KOUDELA, Libor. **Curves in the History of Mathematics: The Late Renaissance,** 2005.

MERLI, Renato Francisco. A distinção entre curvas geométricas e curvas mecânicas na obra A Geometria de René Descartes. **XVI Encontro ANPOF,** São Paulo, 2015, p. 143-150.

MERLI, Renato Francisco. O conceito de continuidade na geometria cartesiana. **XIII ENEM,** Cuiabá-MT, 2019.

MERLI, Renato Francisco. **A distinção cartesiana entre curvas geométricas e curvas mecânicas.** 2016. Dissertação Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Paraná, 2016.



ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. **História da Ciência.** 2. ed. Brasília-DF: FUNAG, v. 2, 2012.

ROSSI, Paolo. **Nascimento da ciência moderna na Europa.** Tradução de Tradução de Antônio Angonese. Bauru: EDUSC, 2001.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics.** New York: Dover, 1954.
Utilização de instrumento de medida do século XVI. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. **“A Matemática e a Filosofia de René Descartes”.** Goiás, 2010.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. A Geometria. Rio Claro – SP, **Bolema**, v. 18, n. 23, 2005.

ZEFERINO JUNIOR, Jorge Luiz de Almeida. **Um estudo sobre o cálculo de fluxões de Isaac Newton.** Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

Recebido em: 14 / 06 / 2023
Aprovado em: 24 / 08 / 2023