



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONCEPÇÕES DE POLYA E A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO

PROBLEM SOLVING: POLYA CONCEPTIONS AND THE TEACHING-LEARNING-EVALUATION METHODOLOGY

Eduardo Rafael Zimdars¹; Neila Tonin Agranionih²

RESUMO

Neste artigo temos como objetivo analisar, utilizando a metodologia exploratória, as duas principais linhas teóricas acerca da resolução de problemas presentes em pesquisas no Brasil – de Polya e do grupo criado por Onuchic, com vistas às aproximações possivelmente existentes. Polya é pioneiro nesta área ao propor uma heurística própria para a resolução de problemas em matemática, trazendo em seu livro *A Arte de Resolver Problemas* (1945), possíveis abordagens para sala de aula, com problemas e estratégias para auxiliar professor e estudante. Já no final da década de 1980, Onuchic propôs, juntamente ao seu grupo de pesquisa, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), outra abordagem acerca da resolução de problemas, denominada Ensino-Aprendizagem-Avaliação. O GTERP se baseia em uma metodologia de ensino de matemática através da resolução de problemas. A partir da análise, percebemos que existem incompreensões do método de Polya, sendo entendido como um algoritmo para se tornar um bom resolvidor de problemas, quando na verdade propõe direcionamentos metodológicos ao professor. Com isso, as duas linhas são semelhantes no que tange a importância do diálogo entre professor e estudante durante a resolução de problemas e seus papéis durante as aulas, sendo posicionadas teoricamente no ensino através da resolução de problemas. Porém, enquanto o GTERP centra-se na avaliação e no trabalho em grupo propiciados através da resolução de problemas, Polya tem como foco possíveis situações que possam ocorrer durante a resolução.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Ensino de Matemática; Polya; Onuchic.

ABSTRACT

In this article, we aim to analyse, using an exploratory methodology, the two main theoretical lines about solving problems present in research in Brazil – by Polya and the group created by Onuchic, with a view to possibly existing approximations. Polya is a pioneer in this area by proposing his own heuristics for solving problems in mathematics, bringing in his book *How To Solve It* (1945), possible approaches to the classroom, with problems and strategies to help teacher and student. At the end of the 1980s, Onuchic proposed, together with his research group, the

¹ Doutorando em Educação em Ciências e em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (PPGECM-UFPR). Professor do Instituto Federal Catarinense (IFC), Brusque, SC, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Hugo Schlosser, 605, Jardim Maluche, Brusque, SC, Brasil, CEP: 88354-300. E-mail: erzimdars@gmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9137-2795>.

² Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora do PPGECM da Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Sete de Setembro, 2645, Rebouças, Curitiba, PR, Brasil, CEP: 80230-085. E-mail: ntagranionih@gmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4539-8281>.



Working Group and Studies in Problem Solving (GTERP), another approach to problem solving, called Teaching-Learning-Evaluation. GTERP is based on a methodology for teaching mathematics through problem solving. From the analysis, we realized that there are misunderstandings of Polya's method, being understood as an algorithm to become a good problem solver, when in fact it proposes methodological directions to the teacher. Thus, the two lines are similar in terms of the importance of dialogue between teacher and student during problem solving and their roles during classes, being theoretically positioned in teaching through problem solving. However, while GTERP focuses on the assessment and group work provided through problem solving, Polya focuses on possible situations that may occur during resolution.

Keywords: Problem solving; Mathematics Teaching; Polya; Onuchic.

Introdução

No início do século XX a matemática era caracterizada pela memorização e repetição de conceitos. Anos depois, buscou-se um ensino voltado à aprendizagem com compreensão, porém nessas duas diferentes formas de ensino, a maioria dos estudantes não aprendia (Onuchic; Allevato, 2012). Assim, a partir dessa época, tiveram início as discussões sobre os problemas como uma forma de aprender matemática. Em 1945, George Polya, em seu livro *How To Solve It* – em português, *A Arte de Resolver Problemas*, já defendia a importância da descoberta e de levar o estudante a pensar por intermédio da resolução de problemas. A partir disso, ele foi considerado o pioneiro no trabalho acerca da resolução de problemas no ensino de matemática (Allevato; Onuchic, 2008).

Todavia, entre os anos 1960 e 1970, o ensino da matemática em diversos países foi influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna, que visava a renovação do ensino. Essa reforma apresentava um ensino apoiado em uma estrutura lógica, algébrica, topológica e focada na teoria dos conjuntos. Segundo Onuchic e Allevato (2012), o ensino era voltado à formalização, sem problemas práticos e, por consequência, não foram obtidos os resultados esperados.

Diante disso, na década de 1970, os educadores matemáticos perceberam possibilidades no campo da resolução de problemas. Segundo Allevato e Onuchic (2008), o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), principal organização profissional para professores de matemática, mostrou preocupação com o ensino e com a aprendizagem matemática. Desse modo, “a primeira recomendação foi que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática nos anos 1980” (Onuchic, 1999, p. 204). Assim, educadores matemáticos desenvolveram recursos na área de resolução de problemas voltados ao trabalho em sala de aula. Essas produções se deram em forma de



problemas e sugestões para o trabalho do professor com base na resolução de problemas (Onuchic; Allevato, 2012).

Esse material auxiliou os professores a utilizarem a resolução de problemas como principal prática de ensino, porém, com diferentes concepções. Schroeder e Lester (1989) resumem e apresentam essas diferentes perspectivas em três abordagens da resolução de problemas para sala de aula. São elas: ensinar **sobre** resolução de problemas, ensinar **para** resolver problemas e ensinar **através** da resolução de problemas.

O professor que ensina **sobre resolução de problemas** está ressaltando o processo de ensinar aos estudantes como os problemas são resolvidos. Algumas das estratégias dessa perspectiva são: olhar para padrões, resolver um problema mais simples e rever o trabalho, criar estratégias de resolução. Essa abordagem pode ser percebida, por exemplo, no estudo para alguns testes padronizados, nos quais o interesse é resolver problemas de forma rápida e correta (Schroeder; Lester, 1989; Onuchic 1999).

Já quando se ensina **para resolver problemas**, o professor foca em ensinar aos estudantes habilidades de como usar o que é aprendido em sala para resolver problemas contextualizados, ou até mesmo exercícios. Essa segunda perspectiva é comumente presente em aulas tradicionais que seguem, por exemplo, o formato: formalização do conteúdo, exemplos resolvidos pelo professor e repetição do conteúdo em outros problemas ou exercícios pelos estudantes (Schroeder; Lester, 1989; Onuchic 1999).

Por fim, a abordagem de ensino **através da resolução de problemas** se baseia em uma metodologia em que os problemas são propostos antes da formalização do conteúdo necessário ou mais apropriado para a resolução, ou seja, são problemas geradores (Schroeder; Lester, 1989; Onuchic 1999). Nesse caso, podemos exemplificar com a perspectiva desenvolvida inicialmente por Onuchic, no Brasil, a partir da publicação do artigo “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas” (Onuchic, 1999). Assim, o estudo da resolução de problemas como uma metodologia de ensino, passou a ser estudada e pesquisada pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), liderado por Onuchic.

A partir dessas três diferentes concepções, percebemos que ainda permanecem dúvidas em relação a resolução de problemas como metodologia de ensino, com incompreensões entre as abordagens, principalmente relacionadas às ideias de Polya. Com base nisso, o objetivo deste artigo é analisar as duas principais linhas teóricas acerca



da resolução de problemas presentes em pesquisas no Brasil – de Polya e do GTERP, com vistas às aproximações possivelmente existentes.

Com foco nesse objetivo, a metodologia desta pesquisa é exploratória, que, segundo Gil (2008), busca tornar o problema/assunto mais explícito ou constituir hipóteses. Dessa forma, “seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado” (Gil, 2008, p. 41). Para isso, apresentamos as concepções de Polya, de outros pesquisadores e do GTERP, finalizando com a análise das possíveis aproximações.

Influências no desenvolvimento das ideias de Polya

Segundo Balieiro Filho (2004), preocupações acerca de como aprendemos matemática estão intrinsecamente relacionadas ao próprio desenvolvimento da matemática enquanto ciência. Porém, a Educação Matemática como área de conhecimento e, conseqüentemente, como área de pesquisa, se estabelece somente no final do século XIX.

As ideias de John Dewey, em sua obra *Psicologia do Número* (1895), enfatizam que o professor e o estudante devem romper a relação baseada no formalismo, no qual este é mero espectador, mantendo, assim, uma relação de cooperação (Garnica *et al.*, 2006). Entretanto, segundo Garnica *et al.* (2006), somente em 1908, com as contribuições do matemático Felix Klein, a Educação Matemática ganha destaque no cenário tanto da matemática como da Educação.

A consolidação da Educação Matemática como uma subárea da matemática e da educação, de natureza interdisciplinar, se dá com a fundação, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, em 1908 da Comissão Internacional de Instrução Matemática, conhecida pelas siglas IMUK/ICMI, sob liderança de Felix Klein (Garnica *et al.*, 2006, p. 3).

A partir desse momento, ela ganha destaque e, no período pós primeira guerra mundial, as discussões são ampliadas e são propostas mudanças curriculares no ensino de matemática. Por exemplo, nos Estados Unidos: “Um dos primeiros projetos a ter repercussão internacional nos Estados Unidos foi o *University of Illinois Committee on School Mathematics*, criado em 1951 sob a liderança de Max Bieberman” (Garnica *et al.*, 2006, p. 4).

Além disso, foi próximo a esse período, na década de 1950, que o movimento conhecido como Matemática Moderna ganha mais expressividade nos Estados Unidos.



Esse movimento objetivava uma reforma curricular, em que a Matemática seria estudada com base na teoria dos conjuntos e suas estruturas fundamentais (Cousin, 2011), conforme já citamos na introdução deste artigo. A justificativa de expor esse breve cenário do desenvolvimento da Educação Matemática, principalmente como área de conhecimento, mais especificamente no que tange às reformas que foram feitas, é importante para contextualizar a origem do interesse na resolução de problemas para Polya.

Contribuições de Polya

A resolução de problemas ganha destaque com George Polya (1897-1985), que estava imerso no momento histórico de reformas do ensino da matemática. Polya, matemático húngaro, pesquisou e atuou como professor a maior parte de sua vida na Universidade de Stanford, nos Estados Unidos, uma vez que a Europa passava pela segunda guerra mundial. Ele contribuiu com vários ramos da matemática, porém ficou conhecido por sua célebre obra: *How To Solve It*, traduzida como “A Arte de Resolver Problemas”, de 1945, sendo inovador nas questões relacionadas à resolução de problemas, e considerado o primeiro pesquisador a estudar sobre uma heurística de resolução de problemas própria para matemática (Pereira, 2002).

Por isso, quando tratamos sobre a resolução de problemas, sua origem se dá com Polya, mais especificamente com a obra citada anteriormente.

O livro é dividido em quatro partes: a primeira fala sobre a resolução de problemas e uma perspectiva de aplicação em sala de aula; a segunda imita um diálogo entre professor e aluno durante a aplicação em sala da resolução de problemas; a terceira trata sobre a heurística da resolução de problemas; a quarta traz ao leitor alguns problemas, indicações de como resolvê-los e as soluções (Sabatke, 2018, p. 75).

Neste artigo, não temos como objetivo esgotar o estudo da obra, porém ela é importante para justificar algumas concepções que surgem com base na teoria de Polya, principalmente as possibilidades metodológicas da resolução de problemas em sala de aula, incluindo o papel do professor e do estudante, bem como características teóricas. Esses são pontos de interesse de Polya, pois ele tem como intenção auxiliar os professores para que sejam orientadores de seus estudantes em sala de aula (Fernandes, 2020).

Desse modo, Polya (1995) se preocupa em definir uma heurística da resolução de problemas e elucidar algumas situações que podem ocorrer em sala de aula quando o



estudante resolve um problema. Para isso, define quatro passos – ou fases – para resolver um problema.

São elas: compreensão do problema, em que as seguintes perguntas podem auxiliar: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Além disso, traçar uma figura pode auxiliar, bem como, usar uma notação adequada. A segunda etapa é o estabelecimento de um plano, em que o autor traz novamente algumas indagações que podem ser feitas. Ainda nesse passo, pode-se buscar um problema mais específico, um mais genérico, algum análogo, ou ainda usar algum problema correlato já resolvido para auxiliar. A terceira etapa é a execução do plano, que corresponde a: “ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?” (POLYA, 1995, p. xiii). A última etapa é o retrospecto, que consiste em verificar o resultado, analisar se pode chegar a solução por outro caminho ou ainda usá-la em outro problema (Sabatke, 2018, p. 75).

Conforme destaca Fernandes (2020), estão relacionadas a essas quatro fases as principais incompreensões do método de Polya. Uma vez que são compreendidas, em pesquisas e práticas docentes, como um algoritmo – ou técnica – que deve ser minuciosamente seguido para que o estudante se torne um bom solucionador de problemas. Entretanto, Polya as concebe como indicações metodológicas de como pode ser o trabalho de mediação do professor, ou seja, perguntas que auxiliem os estudantes no processo de resolução, sem que a resposta seja dada. Com o passar do tempo, e adaptação a essa possibilidade metodológica, os próprios estudantes podem fazer a si mesmos essas perguntas.

Com base nos quatro passos de resolução, Polya (1995) define, com exemplos, possíveis diálogos entre professor e estudantes, permitindo que percebamos o que se objetiva com esse método no ensino de matemática. O papel do professor nessa perspectiva é de auxiliar os seus estudantes, tendo como objetivo indicar passos (caminhos) durante a resolução de problemas, fazendo com que os perceba no contexto do problema. Assim, Polya (1995, p. 2) diz: “[...] desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio”, o que significa criar possibilidades para que ele desenvolva a capacidade de resolver problemas. Porém, essa capacidade não está relacionada com a correta aplicação de algoritmos ou técnicas, mas com a constituição de aprendizados por compreensão própria do estudante (Polya, 1995; Fernandes, 2020).

Em relação ao problema e sua resolução, Polya (1995) afirma que quanto mais for possibilitado que o estudante resolva diferentes problemas, maior será o seu sucesso na resolução. Desse modo, compara a prática de resolver problemas com a natação, a qual se aprende pela prática. O autor ainda destaca que é importante atentar-se à resolução



feita por outras pessoas, percebendo suas formas de resolver, para que seja possível criar estratégias próprias. Percebe-se com isso que o professor ensina, com base na mediação, formas para resolver problemas, e os estudantes desenvolvem estratégias com compreensão: “graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer” (Polya, 1995, p. 3).

Complementado, Polya (1995) descreve que o vocabulário usado no problema deve ser claro e condizente com o entendimento dos estudantes, pois, caso contrário, não saberão o que devem fazer. Outro fato que pode ocorrer é que não tenham interesse em resolvê-lo, o que pode ser responsabilidade do professor ao escolher o problema, assim: “o problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante” (Polya, 1995, p. 4). Fato que possivelmente resultará na boa vontade por parte dos estudantes para resolvê-los.

Com base nos aspectos descritos e analisados, corroborando com Fernandes (2020), podemos “[...] verificar que a pesquisa de Polya transcende as quatro fases apresentadas e que suas orientações seguem numa linha de ensino por meio da Resolução de Problemas” (Fernandes, 2020, p. 30). Isto é, as concepções de Polya são mais amplas do que apenas determinar etapas para resolução de um problema.

Ponto de vista de outros pesquisadores

Existem autores que assemelham suas concepções acerca da resolução de problemas a Polya. A fim de que se tenha ideia dessas visões alternativas, para além de Polya e do GTERP, elencamos a este ensaio as de Charles (1991) e Charles e Lester (1992).

Segundo Charles e Lester (1992, p. 335, tradução nossa): “a abordagem de Schoenfeld é destinada para o estudante desenvolver habilidades metacognitivas para resolver problemas”. Para isso, são exibidas por Schoenfeld (1985) três questões para auxiliar o estudante a organizar seu trabalho: a primeira fala sobre o estudante saber o que está fazendo e se consegue relatar isso, a segunda trata sobre o motivo de fazer o que relatou na primeira pergunta, ou seja, no que isso ajuda na resolução do problema, e a terceira é sobre o que o resultado representará naquele contexto.



Nesse sentido, Charles e Lester (1992) apresentam um roteiro, composto de três etapas, para orientar o estudante a desenvolver a habilidade de resolver problemas: **compreender o problema**, etapa na qual o estudante lê o problema, define o que precisa encontrar e retira os dados importantes; a segunda etapa é **resolvendo o problema**, em que o estudante olha para um padrão, adivinha e examina, escreve uma equação/expressão, revisa o trabalho, faz uma figura, uma lista organizada, uma tabela, ou usa objetos e simplifica o problema; a última etapa é **respondendo o problema e avaliando a solução**, na qual o estudante confirma se utilizou todas as informações importantes, verifica o seu trabalho, averigua se a resposta faz sentido e escreve a resposta em uma sentença completa (Charles, 1991; Charles; Lester, 1992).

Além disso, os autores definem o papel do professor durante a resolução de problemas em sala de aula, sendo que, para isso, nomeiam e definem três momentos: antes, durante e depois do estudante resolver um problema. Assim, no período **antes** da resolução, o professor deve ler o problema, discutindo-o com os estudantes, auxiliando na compreensão dele; no momento **durante** o professor deve tirar dúvidas, indagar se a solução está correta, observar e ampliar as possibilidades percebidas no contexto em questão; por fim, na etapa **depois**, o professor discute outros problemas relacionados, define e comenta as soluções e introduz outros conteúdos matemáticos. Com isso, percebemos que as concepções destes autores vão ao encontro da teoria de Polya, assemelhando-se nas etapas e no papel do professor (Charles, 1991; Charles; Lester, 1982).

Ensino através da resolução de problemas: ponto de vista do GTERP

Além dos métodos tradicionais de abordagem da resolução de problemas, no final da década de 1980, começaram a surgir novas ideias que buscavam transformá-la em uma metodologia de ensino. Autores como Schroeder e Lester (1989) propuseram uma concepção de ensino chamada de “ensino **via** resolução de problemas”. Essa abordagem enfatizava a importância de considerar a resolução de problemas não apenas como um dos objetivos do ensino de Matemática, mas principalmente como um meio fundamental de se envolver com a própria Matemática.

Nessa proposta pedagógica, as aulas são centradas em problemas desafiadores e relevantes, muitas vezes com contextos do mundo real, sendo necessários conceitos matemáticos para solucioná-los. Dessa forma, a ênfase não se limita a obter respostas



corretas, mas no processo de pensamento, raciocínio e estratégias utilizadas para resolver os problemas.

Entretanto,

A partir de 1990, a abordagem “ensinar via resolução de problemas” (Teaching via Problem Solving) passou a ser “ensinar através da resolução de problemas” (Teaching through Problem Solving), a diferença entre as duas é que a expressão “através de” significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado como se colocava a expressão “via” que significa “por meio de” (Sabatke, 2018, p. 76).

A pioneira e principal pesquisadora da metodologia no Brasil é Lourdes de la Rosa Onuchic, fundadora e coordenadora do GTERP. Esse grupo originou-se em 1992 na UNESP- Rio Claro, com os estudantes do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática. Desde então, os participantes desenvolvem trabalhos sobre a resolução de problemas no campo de estudos e pesquisas da Educação Matemática (Sabatke, 2018).

Segundo Sabatke (2018), um dos marcos iniciais nesse processo foi o artigo intitulado “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas” (Onuchic, 1999), escrito por Lourdes de la Rosa Onuchic. No qual foram apresentadas as primeiras compreensões sobre essa metodologia, dentro do próprio contexto de desenvolvimento da matemática. Assim,

O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal (Onuchic, 1999, p. 207).

A partir desses estudos, o grupo foi desenvolvendo estudos e pesquisas, adotando, atualmente, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A palavra composta “Ensino-Aprendizagem-Avaliação” foi proposta (Pironel, 2002; Onuchic; Allevato, 2011) no sentido de que “ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos” (Onuchic; Allevato, 2011, p.80).

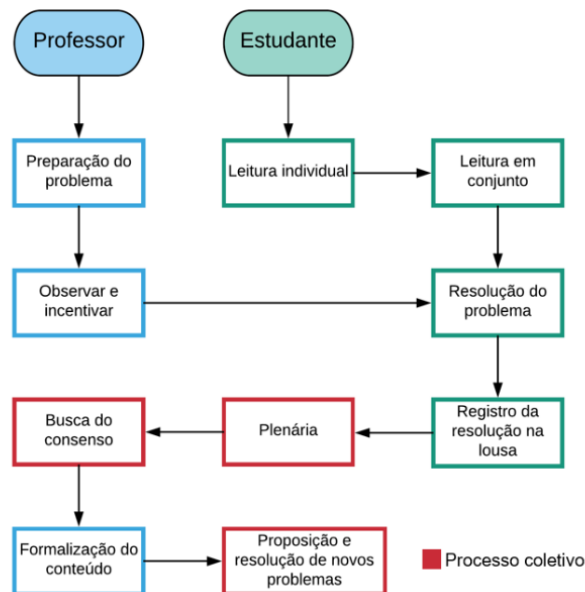
Além disso,

Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81).



Essa metodologia consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas (Onuchic; Allevalo, 2014), conforme resume a Figura 1.

Figura 1 – Dez passos da resolução de problemas, conforme o GTERP



Fonte: Cardozo (2018, p. 56).

Esses dez passos consistem em um esquema para orientar o professor durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Assim, a etapa 1, preparação do problema, consiste na escolha do problema pelo professor, com base nos conhecimentos prévios dos estudantes, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Na etapa 2, leitura individual, cada estudante deve receber uma cópia do problema e observar palavras ou termos desconhecidos. A etapa 3, leitura em conjunto, consiste na criação de grupos para resolução do problema e de dúvidas sobre as palavras e termos desconhecidos. Na etapa 4, resolução do problema, de forma colaborativa os estudantes em seus grupos devem resolver o problema. Nesse mesmo momento, o professor deve incentivar e observar a dinâmica de cada grupo, o que corresponde a etapa 5. Na qual também deve questionar e direcionar o grupo conforme as conclusões e dúvidas dos estudantes, tanto corretas quanto incorretas. Na etapa 6, registro das resoluções na lousa, representantes dos grupos são convidados a registrar suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os estudantes as analisem e discutam. Na etapa 7, plenária, o professor atua como mediador e instiga os estudantes para que expliquem suas resoluções para a sala. Nesse passo é importante deixar que os estudantes mostrem seus raciocínios. Após esse momento, na etapa 8, busca do consenso, que ocorre após as dúvidas serem finalizadas, o professor



tenta, com todos os estudantes, chegar a um consenso sobre o resultado correto. Na etapa 9, formalização do conteúdo, o professor registra na lousa uma apresentação formal, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, destacando teoricamente o conteúdo, bem como as técnicas operatórias. Por fim, na etapa 10, proposição e resolução de novos problemas, os estudantes devem criar outros problemas relacionados ao anterior como uma forma de avaliar se os conceitos e a resolução foram compreendidos.

Além disso,

Vale salientar que a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, defendida pelo GTERP, não exclui as demais concepções de Resolução de Problemas. Isso significa que, quando o professor adota essa Metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem matemática através da resolução de problemas (Sabatke, 2018, p. 77).

Aproximações entre as concepções

Com base no exposto neste ensaio, percebemos que o método de Polya e a metodologia desenvolvida por Onuchic e outros participantes do GTERP, de modos diferentes, rompem com a ideia de que o estudante deve saber apenas aplicar um algoritmo durante a resolução de um problema. Assim, o papel do professor muda de “comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem” (Nunes, 2010, p. 90). O professor também,

Lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a “pensar”, espera que eles “pensem”, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários (coisas que não sabem porque nunca viram ou que já se esqueceram) (Nunes, 2010, p. 90, grifo do autor).

Um ponto importante a destacar é que na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas: “[...] os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de lhes ser apresentado formalmente o conteúdo que é pretendido, assim, o problema gerador é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir em determinada aula” (Sabatke, 2018, p. 78) Isso quer dizer que o processo de ensino e aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse conteúdo que devem ser desenvolvidos na busca por respostas razoáveis ao problema dado (Onuchic; Allevato, 2011). Fato que não é preponderante



para Polya, pois para ele o mais importante é desenvolver habilidades e conhecimentos para a resolução do problema, não sendo pré-requisito que o professor introduza os conceitos com algum problema. Porém, nesse viés, ambos se preocupam para que o estudante queira resolver o problema, tenha interesse por ele, isto é, seja um problema atrativo, como Polya (1995) diz: **um bom problema**.

Assim, nas duas concepções as características de um bom problema são: que seja desafiador, isto é, não se encontre a solução de forma rápida e sem o desenvolvimento de estratégias, mas que esteja dentro das possibilidades de resolução dos estudantes; que esteja inserido em um contexto significativo, podendo ser relacionado a situações reais ou do próprio contexto da matemática; possa ser acessado por meio de conhecimentos anteriores, ou seja, a sua resolução dependerá dos conhecimentos anteriores atrelados ao novo contexto que se mostra; que possibilite diversas estratégias de resolução; que possibilite generalizações após a sua resolução; e que seja interessante, capte a atenção dos estudantes (Sabatke, 2018).

Entretanto, um aspecto que diferencia as duas concepções é que os pesquisadores do GTERP, além de refletirem sobre o ensino e a aprendizagem de matemática com base na resolução de problemas, também se preocupam com a avaliação durante o processo. Assim, incorporaram a avaliação como princípio contínuo e participativo, já que, adotando a metodologia, a avaliação do desenvolvimento dos estudantes é feita continuamente durante a resolução do problema. Desse modo, “a avaliação passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos” (Onuchic; Allevato, 2011, p. 80).

Contudo, as duas concepções se assemelham em relação ao fato de reiterarem que devem ser considerados o diálogo e a interação entre professor e estudantes, a fim de instigá-los acerca de estratégias e caminhos para resolver problemas. Sobre a mediação do professor, encontramos em Polya (1995) direcionamentos que apontam a importância de uma mediação cuidadosa, corroborando com os estudos do GTERP:

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho (Polya, 1995, p. 1).



Isso nos direciona ao papel do estudante, ou seja, mostra que a ele cabe desenvolver um trabalho independente a partir da mediação do professor. Todavia, o GTERP enfatiza a importância do trabalho em grupo, aspecto não discutido em Polya. Este faz indicativos de trabalhos individuais.

Também para o GTERP a razão mais importante não é chegar a solução do problema proposto, mas sim, “ajudar os estudantes a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática” (Onuchic; Allevalo, 2011, p. 81). Já para Polya, o diálogo ocorre para que o professor consiga indicar ao estudante algum passo que ele não percebeu durante a resolução, ou ainda, dar-lhe condições de entender o problema e as estratégias utilizadas para chegar à solução.

Considerações finais

De acordo com a análise feita, resgatamos o objetivo desse artigo, analisar as duas principais linhas teóricas acerca da resolução de problemas presentes em pesquisas no Brasil – de Polya e GTERP, com vistas às aproximações possivelmente existentes, para podermos evidenciar alguns aspectos.

Assim, entendemos que a recorrente redução dos estudos de Polya aos quatro passos descritos para resolver um problema é responsável pelas incompreensões de sua teoria. Nesse caso, os passos são vistos como uma técnica que tornará o estudante cada vez mais capaz de resolver problemas, distanciando-se das concepções do GTERP. Porém, pelo contrário, Polya, assim como o GTERP, tem interesse no problema como uma possibilidade pedagógica para ensinar matemática, ou seja, no ensino através da resolução de problemas. Além disso, nessas correntes, junto aos atos de ensinar e aprender matemática por meio de um problema, o estudante vai criando estratégias para resolver problemas e, conseqüentemente, como resolvê-los.

Outro aspecto comum percebido é em relação aos papéis dos estudantes e do professor. Este atua como mediador e facilitador da aprendizagem, fazendo perguntas instigantes, direcionando o trabalho da sala de aula, porém sem dar a resposta para o problema, permitindo que o estudante raciocine e crie estratégias de resolução. Aos estudantes, por sua vez, cabe o desenvolvido de conhecimentos sobre o tema abordado.

Todavia, sobre a forma de trabalho dos estudantes, percebemos focos diferentes nas duas correntes. Enquanto Polya não se preocupa com o desenvolvido em grupos de



trabalho, com interações entre os estudantes, o GTERP considera esse aspecto central. Assim, entende que os grupos colaboram com o desenvolvimento individual do estudante, por meio do diálogo.

Outro ponto em que são dados focos diferentes está relacionado a finalização do problema. Dessa forma, a metodologia proposta no GTERP não tem como objetivo primário a resolução correta do problema pelos estudantes, mas a utilização das resoluções para que o professor compreenda o raciocínio deles e, após isso, generalize o conteúdo com significado. Já Polya não faz referência a este aspecto, direcionando a intervenção do professor para que o estudante consiga compreender os conteúdos e estratégias de resolução do problema de forma correta. Nessa mesma direção, o GTERP quando concebe a metodologia ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, tem preocupação com a avaliação, enquanto Polya não centra seu estudo nessa direção.

Por fim, entendemos que os aspectos metodológicos propostos pelo GTERP têm características e formas de trabalho particulares para sala de aula. Entretanto, essa circunstância não posiciona as duas correntes de forma discrepante, pois ambas têm concentração no ensino através da resolução de problemas. Esperamos, desse modo, que tenhamos contribuído para que professores-pesquisadores saibam distinguir as duas concepções abordadas, compreendendo-as.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. ICME11-11 - Congresso Internacional de Educação Matemática**. Monterrey - México. 2008.

BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: Quatro Episódios da História da Heurística**. 2004. 217 f. Tese (Doutorado) - Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

CARDOZO, Dionei. **Do átomo de carbono às grandes populações: o ensino de funções exponenciais sob a perspectiva da resolução de problemas**. 2018. 158 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de



Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2018.

CHARLES, Randall. **Mathematics Problem Solving**: Some Issues Related to Teacher Education, School Curriculum, and Instruction. In: J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, D. Fernandes (Eds). *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, pp. 329-342. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

CHARLES, Randall; LESTER, Frank. K. Jr. **How to evaluate progress in problem solving**. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA, 1992.

COUSIN, Alexandra de Oliveira Abdala. O Movimento da Matemática Moderna nos boletins da Sociedade Paranaense de Matemática. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 11, n. 34, p.751-768, set./dez. 2011.

FERNANDES, Dioneu Luiz. **Geometria espacial no ensino médio**: uma abordagem de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. 2020. 121 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2020.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti *et al.* **A Educação Matemática**: uma área de conhecimento em consolidação. o papel da constituição de um grupo de trabalho dessa área na ANPED. São Paulo: trabalho encomendado pelo G.T. 19 de Educação Matemática, 2006.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

NUNES, Célia Barros. **Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. 430 f.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, p. 199-220, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. **Educação Matemática: pesquisa em movimento** / Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Marcelo de Carvalho Borba. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.



ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PEREIRA, Antônio Luiz. **Problemas Matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução**. São Paulo: IME - USP, 2002. Disponível em: http://www.miniweb.com.br/ciencias/Artigos/resolucao_problemas.pdf. Acesso em: 02/06/2022.

PIRONEL, Márcio. A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002. 193 f.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SABATKE, Jéssica Meyer. **Conceito de limite sob a perspectiva da resolução de problemas mediada pelo software Geogebra**. 219f. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2018.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em educação matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. 343 f.

SCHOENFELD, Alan. **Mathematical problem solving**. Orlando, FL: Academic Press, 1985.

SCHROEDER, Thomas. L; LESTER, Frank. K. Jr. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA: NCTM, p. 31-42, 1989.

Recebido em: 16 / 05 / 2023
Aprovado em: 02 / 10 / 2023