BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v10i29.10347

CONCEITOS DA TEORIA DOS GRAFOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO LÓGICO APLICADOS AOS JOGOS COM ESTUDANTES DA EJA

GRAPH THEORY CONCEPTS IN THE DEVELOPMENT OF LOGICAL REASONING APPLIED TO GAMES WITH EJA STUDENTS

Thiago Pires Santana[1]; Rogério Gomes Matias[2];
Paulo Henrique Gomes Santana[3]

RESUMO

O texto discute o desenvolvimento de uma oficina direcionada ao público da Educação Jovens e Adulto (EJA) em uma escola pública em Feira de Santana, Bahia que teve como objetivo investigar as potencialidades e limitações no desenvolvimento do raciocínio lógico e interpretação da realidade fazendo uso dos jogos grafos no contexto de uma experiência didática. A oficina abordou, elementarmente, conceitos iniciais e intuitivos sobre a Teoria dos Grafos, que são apresentados neste trabalho, desde o seu contexto histórico até algumas aplicações. O desenvolvimento dessa oficina teve ênfase nos jogos, explorando a relação destes com grafos e o caráter dinâmico e educativo que há na sua utilização.
Palavras-chave: Grafos; Jogos; Raciocínio Lógico; Problema das pontes.

ABSTRACT

The text discusses the development of a workshop aimed at the public of youth and adult education (EJA) in a public school in Feira de Santana, Bahia, which aimed to investigate the potentials and limitations in the development of logical reasoning and interpretation of reality using graphic games in the context of a didactic experience. The workshop approached, in an elementary way, initial and intuitive concepts about Graph Theory, which are present in this work, from its historical context to some applications. The development of this workshop was highlighted in games, exploring their relationship with graphs and the dynamic and educational nature of their use.
Keywords: Graphs; Games; Logical reasoning; Bridge problem.

[1]Mestre em Ciências da Educação pela Universidade da Madeira (Uma). Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Doutorando pelo Programa de Modelagem em Ciências da Terra e Meio Ambiente pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Professor da Secretaria de Educação do Estado da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Departamento de Ciências Exatas, Feira de Santana, BA, Brasil. E-mail: tpsantana@uefs.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6353-1293.

[2] Mestre em Computação Aplicada pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Professor da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Departamento de Ciências Exatas, Feira de Santana, BA, Brasil. E-mail: rgmatias@uefs.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2478-3578.

[3] Mestre em Computação Aplicada pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Doutorando em Educação na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professor da Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Serra Preta, BA, Brasil. E-mail: paulohenrique@ufba.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0659-3906.

Introdução

Este texto origina-se de pesquisas e trabalhos desenvolvidos acerca dos conceitos de grafos aplicados aos jogos, nos estudos do projeto de pesquisa: “Jogos Combinatórios: Jogos Grafos”, desenvolvido pela área de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Feira de Santana. Objetivando a disseminação dos conceitos matemáticos aplicados a jogos combinatórios em grafos, tanto para estudantes da graduação quanto para estudantes do ensino básico.

As atividades do projeto de pesquisa foram direcionadas aos jogos, baseando-se no desenvolvimento de estratégias vencedoras a partir dos estudos em grafos. Foram a partir das buscas por soluções estratégicas de problemas em jogos que houve o desenvolvimento da Teoria dos Grafos com diversas contribuições de renomados matemáticos. (GONÇALVES, 2007).

Grafos são estruturas discretas, que matematicamente são usados para modelar uma variedade de problemas em diversos e importantes campos do conhecimento. (OSTROSKI; MENONCINI, 2009). Possuem uma diversa aplicabilidade, a exemplo de circuitos elétricos e eletrônicos em projetos de computadores, como também, na bioquímica molecular no uso de algoritmos para estudo da estrutura do DNA. (NETTO, 2006). Além disso, existe conexão dos conceitos de grafos com a Ciência das Redes, que usa elementos da Teoria dos Grafos como nós e arestas para modelar redes de distribuição de rotas aéreas, rodoviárias, ferroviárias, tráfego de pedestres e redes sociais. (NEWMAN, 2003).

Tendo em vista que a Teoria dos Grafos possui uma vasta aplicabilidade e com o intuito de fomentar entre estudantes o interesse pela matemática. Este texto tem como ponto de partida problemas associados ao projeto supracitado que são oriundos das questões: “Quais aspectos e como a utilização de jogos grafos podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico de estudantes?”.

Diante dessas interrogações, este trabalho objetivou investigar as potencialidades e limitações no desenvolvimento do raciocínio lógico e interpretação da realidade fazendo uso dos jogos grafos no contexto de uma experiência didática.

Alguns aspectos da Teoria dos Grafos e Jogos

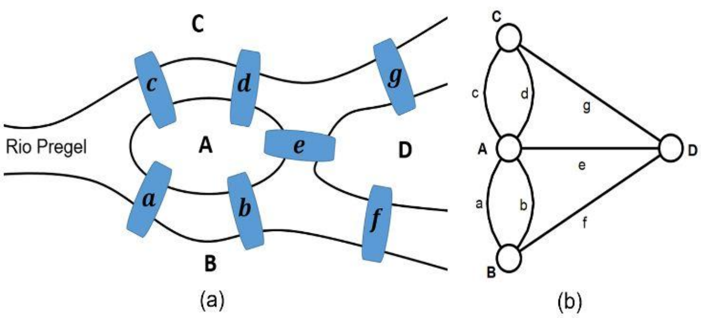
Os conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos aplicados aos jogos, contribuem para o desenvolvimento da Matemática Aplicada de forma crítica e investigativa, estabelecendo relações necessárias para uma construção reflexiva do pensamento e análise dos resultados.

A origem da Teoria dos Grafos surge de uma problemática na cidade de Konigsberg (antiga Prússia), hoje Kaliningrado (Rússia), era uma cidade rodeada por dois braços do rio Pregel e sete pontes que a interligam as regiões vizinhas (Ver Figura 1). Segundo Gonçalves (2007), Barabási (2015) e Vulcani (2015), os moradores desta cidade habitualmente passeavam pelas pontes procurando fazer um caminho que passasse pelas sete pontes uma única vez, a intenção deste percurso ficou conhecido como o problema das pontes de Konigsberg.

Figura 1. Gravura adaptada da cidade de Konigsberg século XVII

Fonte: Disponível em: https://scilogs.spektrum.de/hlf/the-bridges-of-konigsberg/. Acesso: 05 jan. 2023.

Figura 2. Ilustração do mapa de Konigsberg em (a) – Grafo representativo do mapa em (b)[4]



[4] Grafos desenhados com o *software yEd Graph Editor*

Fonte: Elaboração dos autores

O problema das pontes chegou até o conhecimento do matemático Suíço Leonard Euler, que propôs uma solução representando as regiões de terra por letras maiúsculas (A, B, C, D) e as pontes por letras minúsculas (a, b, c, d, e, f, g) e seguidamente numa concepção de regiões de terra como vértices e pontes como arestas, como podemos observar na Figura 2.

A partir dessa representação Euler formulou a hipótese de que a solução do problema podia ser dada pela sequência de oito letras maiúsculas, com a condição de que houvesse duas combinações de duas letras AC (ou CA) e AB (ou BA) já que existem duas pontes conectando as regiões AB e AC, enquanto deveria aparecer somente uma vez as outras combinações, AD, CD e BD. Ele percebeu que cada região, poderia ser conectada por n pontes a outras regiões quaisquer e que para cada uma teríamos um caminho de chegada e outro de saída, ou seja, para uma região com $n = 1$ ponte, esta região é o ponto de chegada ou saída; para uma região com $n = 3$ pontes teríamos duas saídas e uma chegada ou duas chegadas e uma saída, consequentemente, para uma região com $n = 5$ pontes, se partirmos dela teremos três saídas e duas chegadas, caso não saia dela teremos três chegadas e duas saídas. Genericamente, se o número de pontes (n) que liga uma região a outra for ímpar, aparecerá $\frac{(n+1)}{2}$ vezes na sequência que descreve o caminho. (GONÇALVES, 2007). Para o caso das pontes de Konigsberg é possível construir a Tabela 1 abaixo:

Tabela 1. Disposição do nº de vezes que um vértice é visitado no problema das pontes de Konigsberg.

Regiões	Número de arestas (Pontes)	Vezes que um vértice aparece em um caminho
A	5	$\frac{5+1}{2} = 3$
B	3	$\frac{3+1}{2} = 2$
C	3	$\frac{3+1}{2} = 2$
D	3	$\frac{3+1}{2} = 2$

Fonte: Elaboração dos autores

Na interpretação estabelecida por Euler para definição de um caminho que saísse de uma região qualquer e passasse por todas as pontes uma única vez, é preciso que qualquer sequência apresente um caminho em que o número de vezes que cada vértice aparece seja descrito como na Tabela 1. Portanto, temos obrigatoriamente uma sequência de nove vértices, $3 + 2 + 2 + 2 = 9$; desse modo, como a hipótese foi que a solução do problema podia ser dada pela sequência de oito letras maiúsculas (vértices), este argumento contradiz a hipótese formulada. Assim, Euler resolveu o problema das pontes de Konigsberg, chegando à conclusão que é impossível fazer um caminho que passe por todas as pontes uma única vez.

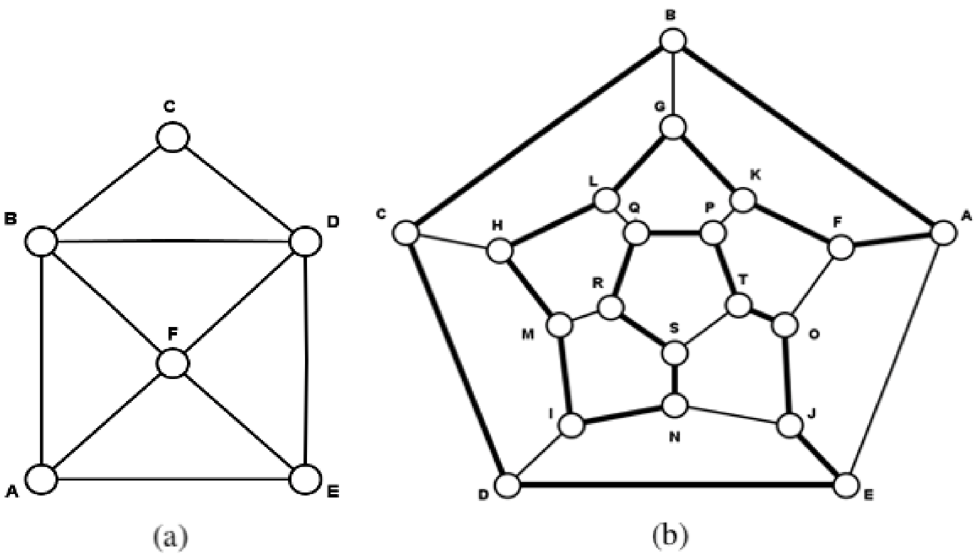
Destacamos que a argumentação para solucionar tal problema segue as descrições dadas por Leonard Euler no período da análise do mesmo. Essa problemática é considerada o marco inicial para o surgimento da Teoria dos Grafos que, segundo Barabási (2015), foi em meados de 1735 e tornou alguns problemas mais simples, permitindo uma visualização mais adequada e analítica dos fenômenos estudados.

A organização do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, podem ser aguçados no estudo de problemas, no aprimoramento de técnicas de resoluções de desafios e até mesmo na utilização de estratégias para jogos de diversas naturezas. A ludicidade e o entretenimento são características intrínsecas aos jogos, além dessas características existentes, há conceitos matemáticos que pertencem às entrelinhas de alguns jogos, possibilitando encontrar por meio de uma estratégia, jogadas vencedoras. A formalização lógica dessas estratégias alinha à Matemática Aplicada, no que se refere a grafo, aos jogos e em especial aos combinatórios, tendo aplicabilidade, por exemplo, na ciência da computação. (SIEGEL, 2013).

Gonçalves (2007) e Vulcani (2015), entendem como Jogos Grafos, os jogos que podem ser resolvidos utilizando a Teoria dos Grafos ou mesmo os que se valem dessa Teoria para sua construção, definição de regras e/ou estruturas. Jogos que envolvem dois participantes, denominados esquerdo (E) e direito (D), que se alternam em movimentos, sem o uso de dados, cartas ou qualquer outro dispositivo randômico, onde os participantes possuem informações completas do estado do jogo são chamados de Combinatórios. (BERLEKAMP; CONWAY; GUY, 2001). Esses dois tipos de jogos não são necessariamente excludentes entre si, há possibilidades de que alguns jogos combinatórios sejam reconhecidos como grafos, tanto quanto alguns jogos grafos possam ser combinatórios.

O chamado jogo do lápis é um clássico jogo considerado grafo que faz uso de conceitos da Teoria dos Grafos em suas regras. Esse jogo possui uma disposição semelhante à da intenção do problema das pontes de Konigsberg, pois consiste em traçar um caminho[5], a fim de encontrar uma trilha[6] partindo de um dos seus vértices. Sem levantar o lápis, deve-se percorrer todo desenho da "casa" (Ver Figura 4a) traçando as arestas uma única vez.

Figura 4. (a) Problema do desenho da "casa" – (b) Icosaedro: Interface do jogo dodecaedro.



Fonte: Elaboração dos autores

Os conceitos matemáticos envolvidos no jogo do lápis, estão relacionados aos resultados desenvolvidos na Teoria dos Grafos que garante a existência de tal percurso a partir da presença de dois vértices de grau[7] ímpar. Logo, a estratégia que possibilita a realização do desenho da "casa" dentro dos moldes do problema é partir de um vértice de grau ímpar e finalizar em outro de grau ímpar, ou seja, para realizar esse trajeto deverá iniciar no vértice A, da Figura 4a, e terminar no vértice E, ou vice-versa.

[5] Genericamente, um caminho em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas.
[6] Uma trilha é um caminho em que todas as arestas são distintas.
[7] O grau de um vértice em um grafo é o número de arestas que esse vértice contém.

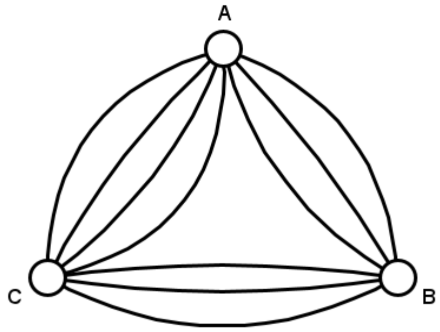
Um outro jogo grafo é o jogo do dodecaedro, conhecido também por "Icosian Game" devido aos 20 vértices que o dodecaedro possui, (ver interface do jogo na Figura 4b). Em uma das versões desse jogo, o jogador deverá encontrar um caminho que passe por todos os vértices começando e terminando no mesmo vértice, não repetindo os vértices anteriores, a exemplo do caminho A, F, K, G, L, H, M, I, N, S, R, Q, P, T, O, J, E, D, C, B, A. que está destacado na Figura 4b. Existem ainda, outras versões para o jogo dodecaedro, que pode ser disputada por dois jogadores, ver Gonçalves (2007), onde o jogo do dodecaedro se define como um jogo grafo e também combinatório.

Um jogo combinatório que também é um jogo grafo é o Nim, que pode ser jogado de diversas formas, com pilhas ou trilhas de objetos, tabuleiros e inclusive com o já mencionado grafo. O desenvolvimento do jogo se dá, em sua maioria, com jogadas de remoções de um determinado número de objetos e no caso dos grafos, com a remoção das arestas de forma alternada por cada participante, em todos os formatos, perde o jogador que não puder mais fazer retiradas. (RODRIGUES; SILVA, 2004). As regras dos jogos e/ou partidas são ajustadas para cada formato e podem ser adaptados os critérios de extração estabelecendo níveis de complexidade bem variáveis.

O jogo do Nim apresenta estratégias de jogadas vencedoras que dá a vitória ao participante que fizer uso, caso o oponente não adote a mesma tática, ou ainda garante ao menos o empate, caso ambos os participantes adotem as mesmas estratégias. Alguns resultados em Fukuyama (2003a; 2003b), demostrando estratégias vencedoras para caminhos e circuitos[8] ímpares em grafos. Do mesmo modo que, Flesch e Pradhan (2015) mostraram, com um conjunto de teoremas, as possibilidades de vitória ou derrota de um jogador, utilizando o jogo Nim em grafos específicos, sendo possível definir uma posição que permite a um dos jogadores vencer independentemente das jogadas que o oponente faça.

[8] Um caminho é fechado quando o primeiro vértice é igual ao último. Caso o caminho fechado tenha todos os vértices distintos, exceto o primeiro e último, os chamamos de ciclo ou circuito.

Figura 5. Grafo C_3 no jogo Nim



Fonte: Elaboração dos autores

Para um grafo cíclico de três vértices (Ver Figura 5) em um jogo Nim com a retirada de uma ou duas arestas, a estratégia que colocará um dos jogadores em uma posição vencedora, se dá quando há a existência de vértices com grau diferente dos demais. Assim, à estratégia é remover as arestas incidentes a um dos vértices de grau diferente, de modo a tornar os graus de todos os vértices iguais, ou seja, remove-se uma das arestas do vértice A do grafo representado na Figura 5, que seja incidente ao vértice C. Vale ressaltar que essa estratégia é válida somente para grafos que possuem todos os vértices conectados (formando um polígono) de três vértices. Para grafos com um número maior de vértices há estratégias distintas da que apresentamos.

Metodologia

Os caminhos que foram determinados procurando responder como o objetivo traçado neste texto foi alcançado. Iniciamos compreendendo que o objeto de estudo é de natureza qualitativa por se tratar de uma pesquisa social que busca compreender o fenômeno social da aprendizagem, sua interação, regulação espontânea e informações não declaradas. (LAPASSADE, 2005).

Comum a vários métodos de pesquisa qualitativa, podemos destacar que a observação participante, por vezes com o auxílio de um diário de campo e registros de imagens, é um instrumento fundamental para o conhecimento de uma prática etnográfica, haja vista que, somente de dentro o pesquisador pode conhecer verdadeiramente uma dinâmica social e compreender os sentidos atribuídos aos atores envolvidos a ponto de pesquisador e população pesquisada se tornarem um só. (LAPASSADE, 2005; MACEDO, 2006; BARBIER, 2004).

Deste modo, admitindo a perspectiva teórica e os recursos destacados acima, para investigar as potencialidades e limitações no desenvolvimento do raciocínio lógico e interpretação da realidade fazendo uso dos jogos grafos no contexto de uma experiência didática, foram organizadas oficinas em uma escola pública como forma de alcançar as intenções deste trabalho.

A implementação da oficina descrita acima ocorreu no Colégio Estadual Agostinho Fróes da Mota, na cidade de Feira de Santana e desenvolvida em 4 encontros consecutivos de 1h40, cada, numa turma com 11 estudantes, da Educação de Jovens e Adultos (EJA), disciplina de Matemática, Tempo de Aprender II, ensino médio. Após um estudo minucioso de livros e artigos, a oficina foi desenvolvida com o tema *Noções de Grafos a partir dos Jogos.*

A proposta foi organizada em alguns momentos:

- Primeiro momento: foi feito o "convite" à participação da atividade a partir de vídeos, imagens e a localização da Teoria dos Grafos em áreas de conhecimento e situações problema;
- Segundo momento: organização dos grupos de trabalho e leitura coletiva da seção (História Breve);
- Terceiro momento: discussão coletiva do problema das pontes de Konigsberg e apresentar intuitivamente os principais conceitos de grafos associando às aplicações na sociedade e discutindo-as;
- Quarto momento: resolução e socialização no quadro o problema do desenho com 16 vértices constante na lista de exercício;
- Quinto momento: formalização dos conceitos discutidos no terceiro momento e estudo das propriedades da Teoria dos Grafos;
- Sexto momento: resolução e socialização pelos estudantes dos problemas 1 e 2 (destacados abaixo).

Os registros foram feitos a partir de imagens e o diário de campo objetivando coletar as informações necessárias para uma análise crítica e reflexiva. Destacamos que todos os registros foram autorizados pelos participantes, respeitando o Estatuto da

Criança e do Adolescente (Lei Nº 8.069/1990), Estatuto do Idoso (Lei Nº 10.741/2003) e da Criança com Deficiência (Lei Nº 5.296/2004).

As ações desenvolvidas pelos estudantes tomaram uma perspectiva holística, foram consideradas na avaliação cada contribuição na oficina, participação e discussão, iniciativa, colaboração nas atividades em grupo, perseverança na resolução dos problemas, integração com os outros participantes, síntese e argumentação, capacidade de projeção do conhecimento apreendido, conclusão e socialização da atividade final. Nesse sentido, assumimos a perspectiva de Luckesi (2005) quando define avaliação da aprendizagem como um processo amoroso, integrativo e inclusivo, dando suporte as mudanças necessárias a fim de construir melhores condições para alcançar os objetivos de aprendizagem.

Os problemas discutidos no sexto momento estão expostos nas questões a seguir:

1. Crie no mínimo dois grafos contemplando cada uma das estratégias discutidas.
2. Utilizando o mapa (Figura 6) escolha pelo menos cinco cidades e a partir das estradas mostradas trace um grafo para elas. Verifique, também, se é possível percorrer todas as estradas passando por elas uma única vez. Você pode utilizar só as BRs só as BAs ou ambas.

Figura 6. Mapa rodoviário

Fonte: Guia chapada diamantina - Mapa de acesso

Entre os diversos problemas que podem ser estudados e relacionados com grafos, a exemplo de redes sociais, redes elétricas, redes neurais, rotas de aviões, entre outros. Escolhe-se um mapa rodoviário da Figura 6, devido a característica desse mapa apresentar conexões de percepções acessíveis na construção do estudo das relações com grafos em que cada cidade pode ser representada por um vértice e as rodovias por arestas.

Discutir descritivamente sobre o desenvolvimento dos problemas nos encontros que contemplaram os momentos discriminados acima, é relacionar a teoria e prática na percepção das dificuldades e potencialidades na dinâmica das interações na sala com as motivações e/ou resistências dos estudantes no decorrer da oficina.

Resultados e discussão

Os resultados alcançados com a execução da oficina sobre os fundamentos da Teoria dos Grafos, ampara as perspectivas teóricas e metodológicas adotadas, cumprindo com os objetivos traçados nesta investigação.

Os momentos da oficina aconteceram em 4 encontros, respeitando o tempo pedagógico dos estudantes e aproveitando os discursos que emergiram das reflexões dos estudantes. Primeiramente foi anunciado aos estudantes, dias antes, que seria desenvolvido uma oficina com o tema grafos e foi solicitado a todos que pesquisassem, se possível na internet e com os recursos que tivessem, sobre o que é um grafo ou sobre a Teoria dos Grafos.

Chegado o primeiro encontro, iniciamos perguntando o que encontraram na realização da pesquisa, alguns se pronunciaram afirmando que tiveram dificuldades de compreensão, mas relataram: “É um ramo da matemática”, “saiu dos problemas das pontes”, “são desenhos com pontos e linhas”, outros disseram que não puderam pesquisar. De maneira geral, buscamos neste momento motivar a turma para o desenvolvimento da atividade, haja vista que, a “motivação pode ser entendida como um processo e, como tal, é aquilo que suscita ou incita uma conduta, que sustenta uma atividade progressiva, que canaliza essa atividade para um dado sentido”. (BALANCHO; COELHO apud MORAES; VARELA, 1996, p. 3).

Explicou-se posteriormente como seria o andamento da atividade bem como o desenvolvimento dos encontros e iniciamos com a apresentação de alguns grafos aplicados à teoria das redes (redes rodoviárias e redes ferroviária do estado da Bahia e de Feira de Santana, redes moleculares e neurais e redes sociais). Neste primeiro momento foi pedido para eles relacionarem as imagens e definirem o que seriam os grafos.

A representação das redes como exemplo de estruturas de grafo foi acertada, pois foi perceptível a identificação de novas informações em associação aos pré-requisitos e as referências que todos em sala possuíam, sendo o ponto de partida para a construção do sequenciamento do raciocínio lógico. Entendemos como raciocínio lógico a estruturação dos pensamentos com o objetivo de resolver determinado problema, baseando-se nas informações contidas e deduzidas na situação. Em Chuí (2002), citado por Bastazini e Mori (2014) o desenvolvimento do raciocínio lógico é uma ferramenta essencial para a organização do pensamento na resolução de problemas do cotidiano.

Após a apresentação das imagens, a turma foi dividida em 4 grupos e foi disponibilizado para todos os estudantes um texto contendo a história da Teoria dos Grafos com o problema das pontes de Konigsberg, a solução de Euler, a associação dos problemas com o jogo/desafio de desenhar uma figura sem repetir o traço. Os estudantes fizeram uma leitura coletiva do texto e o professor foi complementando com algumas informações e desenhando no quadro o grafo representativo das pontes de Konigsberg, concluído a leitura da parte histórica, pediu-se que eles tentassem desenhar o grafo das pontes de Konigsberg sem repetir traço e levantar o lápis, destacamos que até o momento não se tinha discutido com a turma que o problema das pontes não tinha solução.

Com o desenvolvimento do encontro, percebemos que os estudantes não haviam considerado a possibilidade de que não houvesse solução para o problema e por isso tentavam encontrar a solução, mesmo desobedecendo às regras estabelecidas. Ao final do encontro, foi revelado que o problema das pontes não era possível de se resolver nas condições estabelecidas e que a análise desse problema gerado pelas pontes abriu possibilidades para a construção de conhecimento em várias áreas.

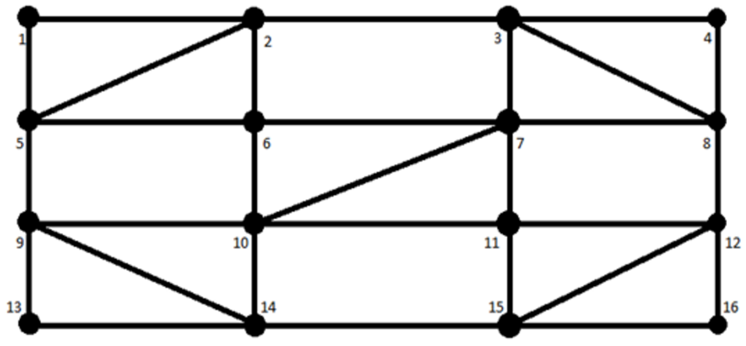
Percebemos que o problema apresentado no formato de um jogo, tem a sobrecarga causada pela introdução de novos conceitos minimizada, tornado o ambiente da sala mais leve aumentando a motivação e a colaboração nos grupos. Borin (1996), discute justamente a importância da utilização dos jogos nas aulas de matemática, salientando o importante papel para diminuir os bloqueios apresentados pelos alunos que apresentam dificuldades em matemática, além de diminuir as resistências à participação e favorecem aprendizagem. (TEIXEIRA; SANTOS, 2014).

Em um segundo encontro, foi apresentado no quadro o desenho de um grafo semelhante à de uma casa, a mesma já apresentada na Figura 4a, sendo solicitado que a desenhassem seguindo as seguintes regras: não pode levantar o lápis do papel e não pode repetir o traço (orientações semelhantes ao problema das pontes de Konigsberg). Este desafio da "casa", foi resolvido rapidamente, entretanto, alguns estudantes ainda apresentavam soluções com variações a partir da subscrição ou supressão de algumas arestas do desenho.

Consideramos que a dinamicidade na resolução do desafio pelos estudantes não implica na facilidade do problema, mas atribuímos também ao começo da reestruturação do pensamento lógico pelos estudantes em detrimento da apresentação e exposição do problema das pontes que norteou as etapas de resolução desse desafio, haja vista que a busca dos estudantes pela compreensão do problema ou por estratégia de resolução fossem semelhantes ao do desafio de desenhar o caminho das pontes de Konigsberg, gerando indagações do tipo "esse problema possui solução?", e ainda "havendo solução está é única?". Desse modo, percebemos que o desenvolvimento da solução, tanto quanto das indagações do desafio da "casa", estabeleceu uma correspondência com o esquema sobre resolução de problemas de Polya (1995) que apresenta um roteiro para o processo de solução de um desafio: entender o problema, elaborar um plano, desenvolver o plano e verificar o resultado.

Em seguida foi apresentado aos grupos o problema do retângulo com 16 vértices, (Ver Figura 7). Com objetivo de construí-lo partindo dos vértices de grau ímpar (7 ou 10) sem levantar o lápis, antes que os estudantes iniciassem essa construção, foi apresentado a sequência (10, 7, 11, 12, 16, 15, 12, 8, 7, 3, 2, 6, 10, 11, 15, 14, 10, 9, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 5, 6, 7), para que os mesmos analisassem e pudessem verificar a possibilidade de construção a partir dessa sequência.

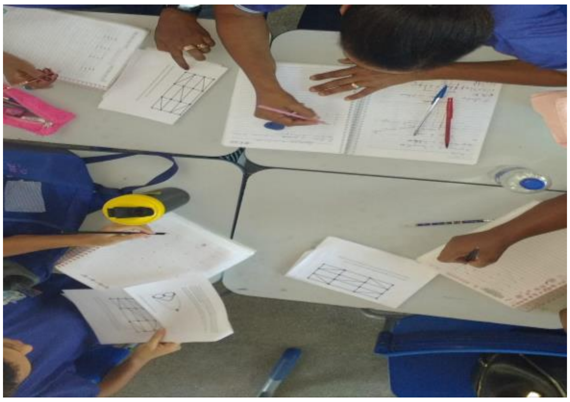
Figura 7. Grafo de 16 vértices



Fonte: Elaboração dos autores

Logo, os estudantes perceberam que a sequência não era possível e sentiram-se desafiados a pensar em outra possibilidade que satisfizesse o problema, nesta etapa os grupos ficaram inquietos, todos discutindo se era possível encontrar uma sequência correta ou não. As discussões e socialização de ideias e raciocínios entres os estudantes reiteram a nossa percepção do desenvolvimento de suas habilidades quanto a concentração e organização do pensamento, em detrimento às provocações que os desafios já apresentados puderam promover. Essa análise converge com os pensamentos de Seara (2009, p. 16) que destaca que a abordagem de problemas por meio de desafios contribui para "a construção e organização do pensamento lógico-matemático; o desenvolvimento da capacidade de leitura e análise crítica; o auxílio na interpretação de outros tipos de textos e colabora para desmistificar a matemática, tornando-a prazerosa para o aluno".

Figura 8. Aplicação da oficina em grupo



Fonte: Elaboração dos autores

Na discussão da solução do desafio do retângulo foi apresentado aos estudantes, que as sugestões de iniciar o caminho que percorra todos os pontos pelos vértices 7 ou 10 é uma estratégia de resolução garantida por alguns resultados matemáticos e desse modo o momento foi oportuno para iniciar apresentação de alguns aspectos elementares da Teoria dos Grafos, de maneira informal.

No desenvolvimento da oficina, um pouco mais de 70% dos estudantes encontraram a solução, os bem-sucedidos leram algumas informações contidas no enunciado do próprio problema, fazendo uma correspondência geral, entre a solução e as estratégias de resolução. Estudantes de dois grupos não obtiveram sucesso, percebemos que o motivo foi devido ao desacreditarem na sequência que estavam desenvolvendo e abandonaram no meio do processo, demonstrando que em alguns casos, os estudantes ainda não tinham o processo de organização do pensamento desenvolvido ou não foram persistentes, nos mostrando a importância do processo de motivação constante na construção da aprendizagem destacado por Balancho e Coelho, citado por Moraes e Varela (1996).

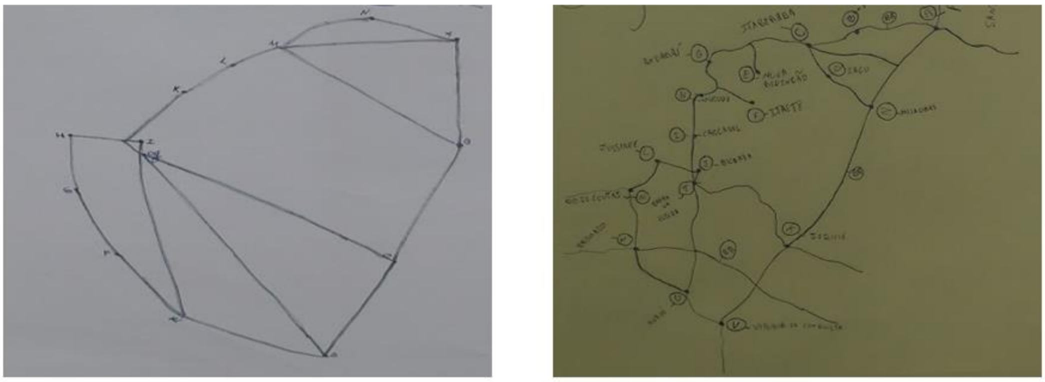
Ainda sobre este problema, um estudante descreveu a sequência que fez e de imediato surgiu a discussão “como adivinhar a sequência correta?”, e em meio ao diálogo com a turma o próprio percebeu que havia dicas (estratégias) na apostila que poderia ajudar. Foi discutido ainda que os desafios apresentados, tanto o das pontes de Konigsberg, quanto da “casa” e o do retângulo são problemas típicos da Teoria dos Grafos e a natureza das ideias tanto desses desafios quanto de suas resoluções alicerçam outros problemas com o grau de complexidade maior.

Retomamos o terceiro encontro resgatando as estratégias apresentadas e formalizando alguns conceitos da Teoria dos Grafos, como: Grafo, vértice, arestas, grau, caminho, ciclo e resultados da Teoria (teoremas) que garante às utilizações de estratégias para solucionar os problemas dessa natureza. A sequência didática admitida entende que o jogo é um instrumento rico para aprendizagem dos conceitos matemáticos e favorece a construção de um ambiente lúdico e interativo. (GONÇALVES, 2007).

Com a finalização da discussão sobre os conceitos, iniciou-se a apresentação do último problema da oficina constante na apostila: utilizando o mapa (Ver Figura 6) escolha pelo menos cinco cidades e a partir das estradas mostradas trace um grafo para elas. Nesta atividade os estudantes tiveram a liberdade de construir suas soluções com a extensão que desejassem, esta etapa foi a todo momento supervisionada e orientada. Constatou-se que a maioria dos alunos construíram uma estrutura lógica do pensamento para resolução do problema, demonstrando a internalização dos conceitos e dos procedimentos necessários para o desenvolvimento autônomo da solução.

A conclusão e socialização da oficina ocorreu no quarto encontro com a finalização da construção do grafo relacionado as rodovias da Figura 6, expondo e apresentando (Ver Figura 9). Apresentação das soluções mostrou aos alunos que mesmo uma área do conhecimento exata pode admitir problemas com inúmeras soluções e todas satisfatórias, e como destaca Luckesi (2005) sem a necessidade de haver uma solução melhor que outra.

Figura 9. Grafos construídos pelos estudantes ao final da oficina



(a) (b)

Fonte: Elaboração dos autores

Percebemos que a construção do grafo representativo da solução do problema e a apropriação dos novos conceitos esteve amparado em significados já existentes na base conceitual dos estudantes. Isso nos mostra que a estruturação e desenvolvimento do raciocínio lógico deve partir do conhecimento prévio dos estudantes e se possível de elementos coletivamente conhecidos.

Considerações finais

Discutimos aqui neste texto o desenrolar de uma oficina que teve intuito de dar subsídios para discutir sobre “quais aspectos e como a utilização de jogos grafos podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico de estudantes” considerando suas potencialidades e limitações para a estruturação do pensamento.

Utilizar os jogos como um instrumento didático para introduzir alguns conceitos matemáticos associados à Teoria dos Grafos é uma ruptura na dinâmica das aulas, como também no conteúdo programático, haja vista a necessidade de respeitar o tempo pedagógico dos alunos e o constrangimento do tempo cronológico junto à atividade curricular.

A partir das observações e registros coletados durante a dinâmica experimentada nos encontros da oficina pudemos observar as várias possibilidades de construir um ambiente de aprendizagem matemática com o auxílio dos jogos. No sentido da Teoria dos Grafos, mesmo não sendo um conteúdo curricular na educação básica, é perceptível a potencialidade que seus conceitos têm em aproximar a Matemática a rede de significados dos estudantes.

Entender como e quais aspectos uma prática pedagógica associada à Teoria dos Grafos pode colaborar no desenvolvimento do raciocínio lógico, considerando as análises feitas na oficina, é perceber de que forma e em que perspectiva seu planejamento e sua condução deve ser pautada para construir habilidades de sistematização do pensamento, capacidade investigativa, elaboração de estratégias de resolução, colaboração, interação e autonomia, apoiando-se nas inúmeras aplicações da Teoria dos Grafos nas outras áreas de conhecimento.

Deste modo, entendemos que as habilidades citadas podem ser favorecidas numa proposta que estruture o convite da atividade numa perspectiva significativa para os estudantes; defina as regras do desenvolvimento da atividade; organize grupos de trabalho e pesquisa; incentive a autonomia de consulta e pesquisa fazendo uso de múltiplas fontes, celulares, tablet, livros; mantenha a motivação e engajamento dos alunos no desenvolvimento da atividade; reconheça as potencialidades dos grupos e socialize os resultados coletivamente.

De modo geral, os resultados da oficina foram alcançados no sentido que a compreensão e internalização dos conceitos apresentados nos desafios durante os encontros da oficina, foram discutidos, questionados e socializados pelos estudantes potencializando o seu desenvolvimento quanto a organização e autonomia do pensamento. Por fim, acreditamos que as interrogações apresentadas no início desse texto, produziram análises e discussões que identificam contribuições na formação do raciocínio lógico por meio dos jogos grafos.

Referências

BARABÁSI, A. L. **Network Science**. 1. ed. [S. l.]: Northeastern University, 2015. Disponível em: <http://networksciencebook.com/>.Acesso em: 25 jan. 2023.

BARBIER, R. **A pesquisa-ação.** Brásilia: Liber Livro Editora, 2004.

BASTAZINI, S. P.; MORI, N. N. R. **RACIOCÍNIO LÓGICO E PENSAMENTO: UM ESTUDO EM SALA DE RECURSOS MULTIFUNCIONAL TIPO I**. 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2

014/2014_uem_edespecial_artigo_silvana_pascutti_bastazini.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.

BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **Winning ways for your mathematical plays**. 2. ed. Wellesley, Massachusetts, USA: Sales e customer service office, 2001. 297 p. v. 1. ISBN 1-56881-130-6.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

FLESCH, B.; PRADHAN, A. Graph Nim. **Pure Insights**, Monmouth, Oregon, v. 4. Artigo 3. 2015. Disponível em: <https://digitalcommons.wou.edu/pure/vol4/iss1/3/>. Acesso em 10 fev. 2023.

FUKUYAMA, M. A Nim game played on graphs. **Theoretical Computer Science**, 2003a. p. 387 – 399.

FUKUYAMA, M. A Nim game played on graphs II. **Theoretical Computer Science**, 2003b. p. 401–419.

GONÇALVES, A. L. **Grafos**: Aplicações ao Jogo. Orientador: Antônio Pascoal. 2007. 98 p. Dissertação (Mestre) - Universidade Portucalense, Porto, 2007. Disponível em: <http://www.prof-lori-viali.com/graduacao/po_2/literatura/grafos/dissertacoes/TMMAT%20102.pdf.> Acesso em: 10 jan. 2023.

LAPASSADE, G. **As Microssociologias**. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**: estudos e proposições. 17. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MACEDO, R. S. **Etnopesquisa crítica, etnopesquisa-formação.** Brasília: Líber Livro Editora, 2006.

MORAES, C. R.; VARELA, S. **MOTIVAÇÃO DO ALUNO DURANTE O PROCESSO DE ENSINOAPRENDIZAGEM**. 2007. Disponível em: https://web.unifil.br/docs/revista_eletronica/educacao/Artigo_06.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.

NETTO, P. O. B. **Grafos**: Teoria, Modelos e Algoritmos. São Paulo – SP. 4. ed. 2006. 328 p. ISBN 9788521203919.

NEWMAN, M. E. J. The Structure and Function of Complex Networks**. Society for Industrial and Applied Mathematics**. 2003. v. 45. p. 167–256.

OSTROSKI, A. MENONCINI, L. Teoria dos Grafos e Aplicações. **Synergismus scyentifica UTFPR**. v. 4. Pato Branco – PR. 2009. Disponível em:

<http://revistas.utfpr.edu.br/pb/index.php/SysScy/article/viewFile/709/465>. Acesso em: 10 dez. 2022.

POLYA, George. (1995). **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro.

RODRIGUES, H. O.; SILVA, J. R. **O jogo do Nim e os conceitos de MDC e MMC**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, Recife, 2004. Anais... Recife: SBEM, 2004. Minicurso. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/2MC06193102434.pdf>. Acesso em: 5 dez. 2022.

SEARA, H. F. A **Compreensão de Conceitos Matemáticos Através de Desafios e Situações-Problema**. In: X EPREM- Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2009, Guarapuava. A Educação Matemática no Paraná - 20 anos - Avanços, Desafios e Perspectivas. Guarapuava: UNICENTRO, 2009. p. 886-892.

SIEGEL, A. N. **Combinatorial Game Theory.** San Francisco, CALIFORNIA: American Mathematical Society, 2013. 523 p. v. 146. ISBN 978-0-8218-5190-6.

TEIXEIRA, R. R. P.; SANTOS, K. R. **Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática**. Revista Linhas, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, jan./jun. 2014. Disponível em: <https://revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1984723815282014302/3103>. Acesso em: 01 mar. 2023.

VULCANI, R. L. M. **Grafos eulerianos e suas aplicações**. Orientador: Celia Picinin de Mello. 2015. 82 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2015. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306826/1/Vulcani_RenatadeLacerdaMartins_M.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2023.

Recebido em: 19 / 03 / 2023
Aprovado em: 31 / 05 / 2023