BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v10i30.10295

TEOREMA DA ALFÂNDEGA: POR UM OLHAR DIFERENTE

CUSTOMS THEOREM: THROUGH A DIFFERENT LOOK

Antonia Charmilla Freire Batista[1], Edvalter da Silva Sena Filho[2], Elaine Sampaio de Sousa Carlos[3]

RESUMO

Existem resultados no campo da Matemática que nem sempre são fáceis de serem contextualizados. A contextualização pode ser interpretada como uma ponte que conecta o conhecimento e à sua aplicação. É possível transcender aos aspectos da Matemática Pura através de situações-problemas contextuais e dinâmicas. Assim, este trabalho tem como objetivo mostrar através do viés das situações-problemas, o Teorema da Alfândega, que é um resultado conhecido nos estudos de Espaços Métricos, por meio de dois problemas. O uso de situações-problemas costuma gerar motivação no aluno, faz com que o mesmo busque mais informações sobre o conteúdo trabalhado, ao se sentir desafiado a apresentar uma solução para o determinado problema. Nesse estudo utilizamos a metodologia de pesquisa descritiva bibliográfica, com foco em dados qualitativos. Acredita-se que o uso de situações-problemas possa ser uma boa aliada no desenvolvimento do processo de aprendizagem.
Palavras-chave: Situação-Problema; Espaços Métricos; Teorema da Alfândega

ABSTRACT

There are results in the field of Mathematics that are not always easy to be contextualized. Contextualization can be interpreted as a bridge that connects knowledge and its application. It is possible to transcend aspects of Pure Mathematics through contextual and dynamic problem situations. Thus, this work aims to show, through the bias of problem situations, the Customs Theorem, which is a known result in the studies of Metric Spaces, through two problems. The use of problem-situations usually generates motivation in the student, makes him seek more information about the content worked on, when he feels challenged to present a solution for the given problem. In this study we used the bibliographic descriptive research methodology, focusing on qualitative data. It is believed that the use of problem situations can be a good ally in the development of the learning process.
Keywords: Situation-Problem; Metric Spaces; Customs Theorem

[1]Doutoranda em Matemática pela Universidade Federal de Paraíba (UFPB), João Pessoa, Paraíba, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dr. Guarani, 317, Derby Clube, Centro, Sobral, Ceará, Brasil, CEP: 62042-030. E-mail: antonia.charmilla@academico.ufpb.br.

ORCID iD:https://orcid.org/0009-0009-1839-630X

[2]Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Docente da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Sobral, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dr. Guarani, 317, Derby Clube, Centro, Sobral, Ceará, Brasil, CEP: 62042-030. E-mail: edvalter_silva@uvanet.br.

ORCID iD:https://orcid.org/0000-0002-5353-065X

[3]Doutoranda em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Docente da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Sobral, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dr. Guarani, 317, Derby Clube, Centro, Sobral, Ceará, Brasil, CEP: 62042-030. E-mail: elaine_sampaio@uvanet.br.

ORCID iD:https://orcid.org/0000-0002-7723-5735

Introdução

A Topologia Geral é um ramo da Matemática que estuda conceitos como continuidade de funções, conexidades de conjuntos e entre outros assuntos. De acordo com Engelking (1989), o surgimento da Topologia Geral é consequência da reconstrução dos alicerces do Cálculo obtidos durante o século XIX.

O Teorema da Alfândega, como o próprio nome já diz, é um resultado da Topologia que trata de problemas que envolvem a fronteira, também chamada de bordo, de determinadas regiões. A problemática envolvendo zonas delimitantes de certos espaços não ficam somente na abstração matemática, pois é comumente tratado na mídia de problemas fronteiriços, como por exemplo: contrabando de mercadorias, evasão de divisas, tráfico de drogas, tráfico de armas, extração ilegal de madeira, dificuldades no monitoramento do fluxo de enfermidades e dentre outros.

A matemática tem grande margem de parceria com outras áreas do conhecimento, além disso, serve como um importante instrumento para resolver os mais variados tipos de problemas que se apresentam no nosso contidiano. Segundo Allevato e Onuchic (2008), historicamente os problemas de matemática sempre ocuparam um lugar central nos currículos de tal disciplina, durante a antiguidade alguém criava um problema, o resolvia, apresentava a solução, e depois uma lista com o mesmo tipo de situação era oferecida, dessa forma havia uma certa operacionalidade daquilo que estava sendo feito, no entanto, atualmente isso não é muito diferente.

Para Batinga (2010, p. 237) ‘‘[...] Um problema é uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a busca de estratégias ou de conhecimentos, ou de técnicas, ou ambos, para encontrar sua solução”. Dessa forma, um problema bem proposto pode ser considerado como um agente edificador do desenvolvimento do pensar matemático. Por conseguinte, independente da metodologia empregada pelo professor, a situação-problema é um aliado no processo de aprendizagem, de modo que entendemos situação-problema de acordo com Meirieu (1998, p. 192)

> Uma situação didática na qual se propõe ao sujeito uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. E essa aprendizagem, que se constitui o verdadeiro objetivo da situação-problema, se dá ao vencer obstáculos na realização da tarefa.

Macedo (2002) diz que, numa situação-problema o aluno deve tomar decisões, ser protagonista, superar desafios, ter posicionamento, coordenar fatores em um contexto delimitado que o desafie a superar toda e qualquer barreira. Prates Júnior e Simões Neto (2015, p.185) apontam características importantes que devem aparecer em uma situação-problema:

> Toda situação-problema deve apresentar: um contexto (e este deve ser interessante para o estudante); um obstáculo (que deve ser transposto, sendo este movimento de superação o real objetivo da situação-problema); um sistema de restrição (instalado na própria situação-problema, para evitar que respostas que não superem o obstáculo sejam fornecidas); e, por fim, um sistema de recurso, que consiste em algum material físico ou digital, instruções-alvos ou atividades dialógicas em sala de aula), que forneçam as condições para construção de conhecimento e resolução da situação-problema.

Tendo esse entendimento como direcionamento, este trabalho se propõe a apresentar uma abordagem diferenciada do Teorema da Alfândega, tendo como suporte as situações-problemas. Apresentaremos uma situação prática, e outra um tanto peculiar do referido teorema.

Para isso, estruturamos o trabalho da seguinte forma. Primeiramente, iremos apresentar conceitos preliminares da topologia dos espaços métricos. Na seção seguinte, enunciaremos o Teorema da Alfândega e doravante empregaremos tal resultado em situações-problemas. Esse estudo teve com suporte a metodologia de pesquisa descritiva bibliográfica com dados qualitativos.

Conhecimentos Preliminares

Dado um conjunto M não vazio chamamos de **métrica** uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par $(x, y) \in M \times M$um número real denotado por $d(x, y)$, chamado distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$.

i. $d(x, y) = 0$
ii. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) \neq 0$
iii. $d(x, y) = d(y, x)$
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Um **espaço métrico** é um par (M, d), onde Mé um conjunto e d é uma métrica em M. Sejam a um ponto do espaço métrico (M, d) e $r > 0$ um número real. A **bola aberta**

$B(a,r)$ de centro a e raio r é o conjunto formado pelos pontos de M cuja a distância ao ponto a é menor do que r. Isto é,

$$B(a,r) = \{ x \in M \mid d(x,a) < r \}$$

A **bola fechada** $B[a,r]$ de centro a e raio r é o conjunto formado pelos pontos de M cuja a distância ao ponto a é menor do que ou igual a r. Ou seja,

$$B[a,r] = \{ x \in M \mid d(x,a) \leq r \}$$

Por fim, a **esfera** $S(a,r)$ de centro a e raio r é o conjunto formado pelos pontos de M cuja a distância ao ponto a é igual a r. Ou seja,

$$S(a,r) = \{ x \in M \mid d(a,r) = r \}$$

Caso o leitor queira se aprofundar nessas definições sugerimos a leitura de Lima (2014a, 2014b, 2020), Batista (2019). Quando estamos trabalhando no plano $\mathbb{R}^2$ e com a Métrica Euclidiana [4], podemos fazer uma analogia das definições apresentadas acima a uma pizza, onde a bola fechada representa a pizza com borda; a bola aberta será a pizza sem borda; a esfera representa a borda da pizza (sem o miolo da pizza), conforme mostra a figura 1.

Figura 1 – Representação da bola aberta, bola fechada e esfera, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $b \in X$ diz-se um **ponto interior** a X quando é centro de uma bola aberta totalmente contida em X. Em outras palavras, quando existir $r > 0$, tal que $B(b;r) \subset X$. A **fronteira** de X em M é o conjunto $front(X)$, formado pelos pontos $b \in M$ tal que, toda bola aberta de centro b contém

[4] A Métrica Euclidiana é a função $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa quaisquer dois vetores x=$(x_1, \dots, x_n)$ e y=$(y_1, \dots, y_n)$ do n-espaço euclidiano ao número:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ \dots \ + (x_n - y_n)^2}$$

pontos de X e pontos do complementar $M - X$. Ou seja, para todo $r > 0$, temos $B(b,r) \cap X \neq \emptyset$ e $B(b,r) \cap (M - X) \neq \emptyset$.

Uma **cisão** de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, como reunião de dois subconjuntos A e B disjuntos e abertos em M. A cisão $M = A \cup B$ diz-se trivial quando um dos conjuntos, A ou B, é vazio. Um espaço métrico M é dito **conexo** quando a única cisão possível em M é a trivial. De modo intuitivo, podemos imaginar o espaço conexo como uma região dotado de apenas um pedaço.

Um caminho num espaço métrico M é uma aplicação contínua $f: I \to M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$, pertecentes a M, são os extremos desse caminho f. Diz-se nesse caso que caminho f liga o ponto a ao ponto b em M. Um espaço métrico M chama-se **conexo por caminhos** quando dois pontos quaisquer de M podem ser ligados por um caminho contido em M.

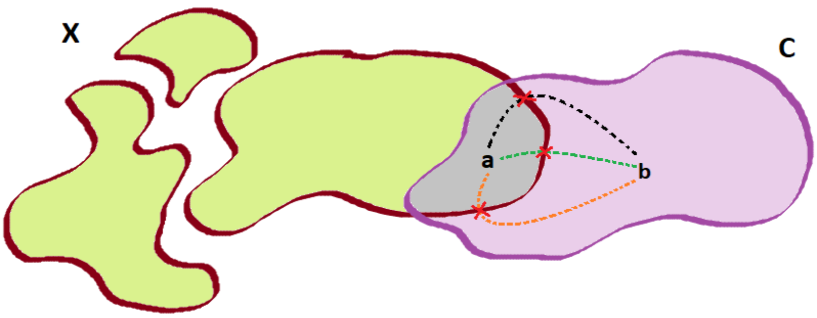
Teorema da Alfândega

A seguir enunciamos o Teorema da Alfândega, de acordo com (LIMA, 2014, p. 57), onde também é encontrado sua demonstração.

Teorema 1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. Se um conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^n$ contém um ponto $a \in X$ e um ponto $b \notin X$ então C contém algum ponto da fronteira de X.*

De um modo intuitivo, o Teorema da Alfândega nos diz que não é possível sair de uma região sem cruzar sua fronteira. Em outras palavras, a figura 2 nos mostra que dado o conjunto conexo C contendo um ponto $a \in X$ e $b \notin X$, então C deverá conter algum ponto da fronteira de X.

Figura 2 – Teorema da Alfândega.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Gestos simples como sair de casa, viajar para outra cidade ou país, separar rebanhos de animais e dentre outros são exemplos intuitivos onde podemos verificar o Teorema da Alfândega. Para Bassanezi (2022, p.18 apud BUNGE, 1974), “Toda teoria específica é, na verdade, um modelo matemático de um pedaço da realidade”.

Encontramos na situação-problema um ambiente propício para a superação das barreiras que impedem a aprendizagem. Nas palavras de Macedo (2002, p. 32 apud LIMA; SILVA 2016) uma situação-problema está diretamente relacionada ao cotidiano, de forma dinâmica e aberta em um universo fantástico e problemático que é a vida, tendo como foco principal a contextualização, apresentando um recorte da vida real.

Na próxima seção, apresentaremos o Teorema da Alfândega, por uma perspectiva diferente. Buscamos empregar uma linguagem acessível, de tal forma que seja possível para o aluno abstrair os problemas propostos de forma concreta, facilitando o processo de aprendizagem.

Assalto a Banco

Ataques a bancos vem se tornarnando uma prática comum no Brasil. De acordo com Mandl (2019), no ano de 2018, “uma média de dois bancos ou caixas eletrônicos foram explodidos por dia, principalmente em pequenas cidades sem grande presença policial”. Por Arcoverde, Affonso, Leite (2020) no estado de São Paulo, “os roubos a bancos saltaram de 11 para 13 entre abril a outubro de 2020 em relação ao mesmo período de 2019, o que representa uma alta de 18%”.

Fonseca, Matravolgy e Jucá (2021), detalham um caso que chocou todo o pais devido ao modus operandi de uma quadrilha especializada em roubar bancos. No dia 30 de agosto de 2021, um grupo fortemente armado realizou um ataque a alguns bancos no centro da cidade de Araçatuba, no interior de São Paulo.

O estado do Ceará não fica distante desses ataques. O roubo ao Banco Central em Fortaleza, ocorrido em agosto de 2005, ficou marcado na história como um dos maiores assaltos a banco. De acordo com Borges (2020), essa quadrilha furtou em torno de 164 milhões de reais do Banco Central.

Mostraremos agora, como o Teorema da Alfândega pode contribuir nesse casos. Considere, de modo hipotético, que uma quadrilha especializada em roubos a bancos esteja fazendo sucessivos ataques a agências no interior do estado do Ceará. Cidades de Umirim, Itapipoca, Miraima e Massapê foram assaltadas, respectivamente nessa ordem.

Figura 3 –Cidades de Umirim, Itapipoca, Miraima e Massapê.

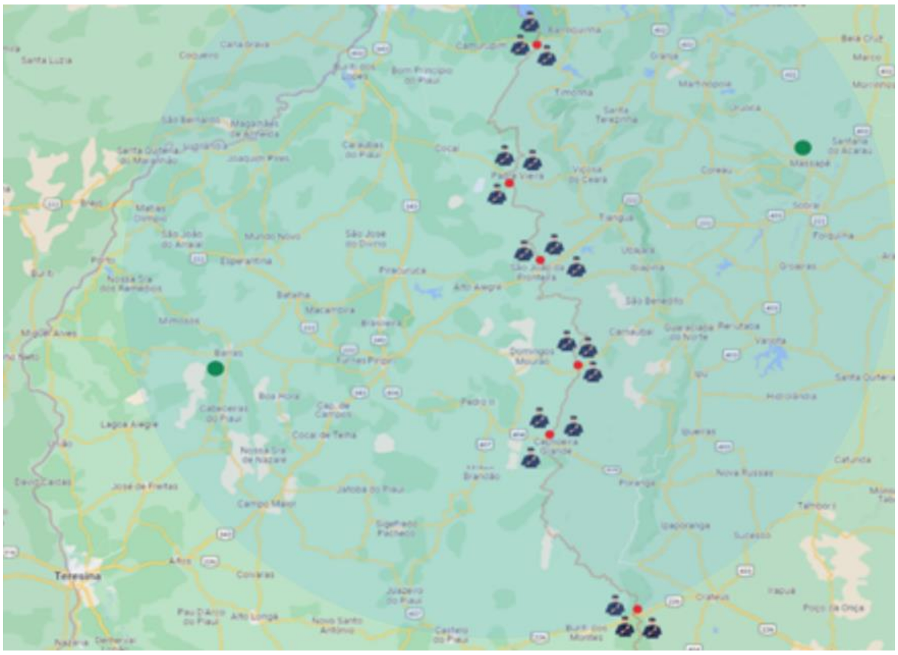
Fonte: Google Maps adaptada (2023).

A polícia, através de interceptações telefônicas, identificou alguns membros dessa quadrilha e descobriu que esse grupo pretende fugir para o estado do Piauí, mais precisamente nas redondezas da cidade de Barras. Ao fazer o mapeamento dos bancos assaltados a polícia observou que a última cidade que eles praticaram delito fica próxima da região de fronteira com o Piauí, ou seja, eles estariam mais próximos de aplicarem sua fuga.

Levando em consideração que os bandidos frequentam apenas rodovias principais e que o objetivo dos meliantes é chegar o mais rápido possível em Barras, qual seria uma boa estratégia para prender essa quadrilha? Nesse momento, vale destacar que, de acordo com Richter (2001, p. 137) “É a partir de uma prática sentida como problemática que nascem as açõesmetódicas que culminam na descoberta científica”.

Voltando ao nosso problema, provavelmente uma resposta imediata para a solução consiste na alocação de policiais por toda a região do Ceará, próxima a última cidade assaltada. No entanto, essa alternativa pode não ser razoável, já que isso exigiria uma grande alocação de recursos pessoais e financeiros. Assim, tentando otimizar os custos, uma boa estratégia, considerando as condições do problema, seria posicionar os policiais na região de fronteira do Piauí com o Ceará.

Figura 4 – Pontos da fronteira do Piauí com o Ceará, nas proximidades de Massapê.



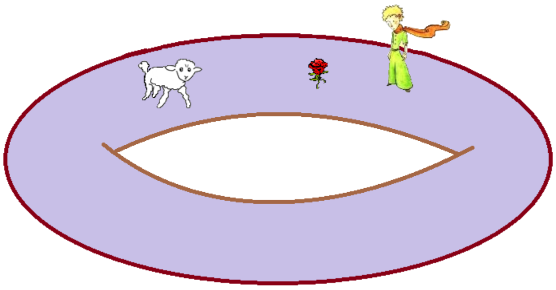
Fonte: Google Maps adaptada (2023).

Estaremos assumindo que os bandidos não façam um percurso muito extenso, visto que o tempo será o maior inimigo deles, pois quanto maior for a distância percorrida, maior será a chance de serem capturados. Do ponto de vista do Teorema, podemos levar em consideração que o objetivo da polícia é fazer um cerco de modo que torne a região do mapa desconexo, pois caso isso ocorra o espaço deixa de ser conexo por caminhos. Logo, as cidades de Massapê e Barras não podem ser conectadas. O sucesso na missão implicará na contrapositiva do Teorema da Alfândega, já que não é possível sair de um local e chegar em outro sem passar pela sua fronteira.

A Rosa e o Pequeno Príncipe

O Pequeno Príncipe é uma obra literária de autoria do francês Antoine de Saint-Exupéry (1900-1944). O jovem rapaz, que é conhecido por Pequeno Príncipe, vive com seu carneiro e com uma flor em um planeta (estaremos adaptando o nome e estrutura do planeta original da obra literária) chamado MTM-789, cujo aspecto lembra uma rosquinha.

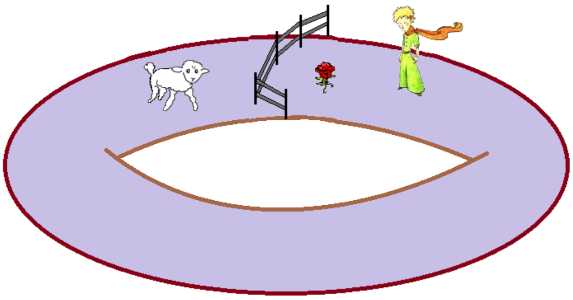
Figura 5 – Planeta MTM-789.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Vale ressaltar que a história que apresentaremos a seguir, em nada tem a ver com a obra literária original. O Pequeno Príncipe, no seu planeta MTM-789, está vivenciando um problema, ele não pode deixar sua rosa sozinha, pois seu carneiro pode se alimentar dela. Tentando evitar que isso aconteça, o Pequeno Príncipe resolve construir uma cerca que separa a região onde o carneiro vive da rosa.

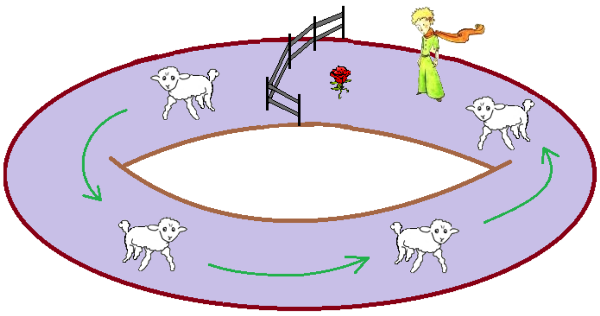
Figura 6 – Primeira cerca no planeta MTM-789.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Entretanto, o Pequeno Príncipe percebe que a cerca de nada adiantou, pois o carneiro consegue ainda se aproximar da rosa.

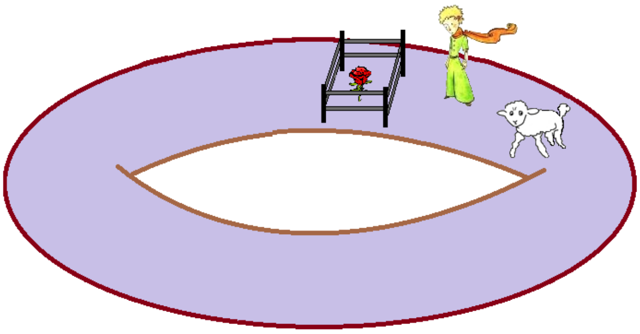
Figura 7 – Planeta MTM-789 conexo por caminho.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Isso só acontece, porque a nova região continua sendo conexa por caminhos. Ou seja, ainda é possível conectar quaisquer dois pontos do planeta. Analisando o Teorema da Alfândega, temos que uma solução seria construir a cerca em torno da rosa ou em torno do carneiro. Nos dois casos seria também uma contrapositiva do Teorema, ou seja, a solução consiste no fato de que não existiria um caminho ligando o carneiro a rosa, pois a existência desse caminho implicará no cruzamento da fronteira, no nosso caso a cerca.

Figura 8 – Segunda cerca no planeta MTM-789.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

O espaço tridimensional que o Pequeno Príncipe vive é conhecido pela topologia como toro ou Toroide, cujo mesmo aspecto pode ser visto em uma boia salva-vidas ou ainda em uma rosquinha do tipo donuts, e uma de suas propriedades principais é ser conexo. Assim, o planeta MTM-789 somente admite a cisão trivial. A cerca descrita apresentada na (figura 6) não foi suficiente para separar o carneiro da rosa porque o espaço continuava sendo conexo por caminhos.

Considerações Finais

Este trabalho empenha-se em apresentar o Teorema da Alfândega por uma perspectiva diferente. A estratégia adotada foi associar esse resultado, que é bastante conhecido na Topologia dos Espaços Métricos, com problemas relacionados à segurança pública e um outro um tanto quanto peculiar. O uso das situações-problemas ajuda na fixação/compreensão do conteúdo abordado, uma vez que aluno se sentirá desafiado em apresentar/construir uma solução para o problema exposto. Espera-se que esse trabalho possa motivar o docente a buscar outro viés de abordagem da Matemática, com isso ajudará desmitificar que ela é uma ciência que não é dinâmica e imutável, já que essas contextualizações contribuem para potencializar a aprendizagem, tornando a disciplina mais atraente e significativa na perspectiva do estudante.

Referências

ALLEVATO, N.S.G., ONUCHIC, L.R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1-19, 2009.

ARCOVERDE, L., AFFONSO, J., LEITE, I. Roubos a banco crescem 44% no estado de São Paulo em 2020, diz secretaria. **G1**. Disponível em: https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2020/12/03/roubos-a-banco-crescem-44percent-no-estado-de-sao-paulo-em-2020-diz-secretaria.ghtml. Acesso em: 18 set. 2021.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. **Editora Contexto**, 2002.

BATISTA, A. C. F., O Teorema da Alfândega: Demonstração e Aplicações. **Trabalho de Conclusão de Curso**. Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual Vale do Acaraú, 2019.

BATINGA, V. T. S. A abordagem de resolução de problemas por professores de química do ensino médio: um estudo sobre o conteúdo de estequiometria. 283 f. 2010. **Tese** (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

BORGES, M., Furto ao Banco Central resultou em 119 réus condenados pela Justiça Federal no Ceará. **G1CE**.2020. Disponível em: https://g1.globo.com/ce/ceara/noticia/2020/08/04/furto-ao-banco-central-resultou-em-119-reus-condenados-pela-justica-federal-no-ceara.ghtml. Acesso em: 26 jul. 2023.

CAVALCANTI, M. Discursos 1999/2000. **Senado Federal**: Brasília-DF, 2000.

ENGELKING, R. General Topology. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

FONSECA, N., MATRAVOLGYI, E., JUCÁ, J., Criminosos atacam agências bancárias em Araçatuba e fazem reféns. **CCN Brasil**. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/nacional/criminosos-atacam-agencias-bancarias-em-aracatuba-e-fazem-refens. Acesso em: 18 set. 2021.

PRATES JÚNIOR, M. S. L., SIMÕES NETO, J. E. Situações-problemas como Estratégia Didática para o Ensino dos Modelos Atômicos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**. 2015.

LIMA, E. L. Espaços Métricos.**Editora:IMPA**,6. ed.,2020.

LIMA, E. L. Curso de Análise. Vol. 2. **Editora: IMPA**, 1. ed., 2014a.

LIMA, E.L. Elementos de topologia geral. **Editora: SBM**,3. ed.,2014b.

LIMA, M. V. S; SILVA, S. A. Situações-Problema: Uma estratégia didática para o ensino de ciências no nível fundamental. **Revista Dynamis**. FURB, Blumenau, v. 22, n. 1, p. 59-73, 2016.

MACEDO, L., Situação-problema: forma e recurso de avaliação, desenvolvimento de competências e aprendizagem escolar. In: PERRENOUD, P. et al. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. **Porto Alegre: Artmed**, 2002.

MANDL, Carolina. Explosão de caixas eletrônicos vira rotina no Brasil e desafia bancos. **Folha de S. Paulo**. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2019/04/explosao-de-caixas-eletronicos-vira-rotina-no-brasil-e-desafia-bancos.shtml. Acesso em: 26 jun. 2019.

MEIRIEU, P., Aprender. sim, mas como?. 7. **ed. Porto Alegre: Artmed**, 1998.

RICHTER, M. G. Aspectos cognitivos da investigação-ação educacional. In. MION, R. A.; SAITO, C. H. Investigação – Ação: mudando o trabalho de formar professores. **Ponta Grossa: Gráfica Planeta**, p. 136-145, 2001.

SAINT-EXUPÉRY, Antoine de. O pequeno Príncipe**. Editora Agir**. 31.ed. Rio de Janeiro:1987.98 p.

Recebido em: 09 / 03 / 2023
Aprovado em: 06 / 09 / 2023